длины n в группе F_m. Тогда

$$|E_n| = 2m(2m-1)^{n-1}, \quad n=1,2,\dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Заметим, что $E_0=1$, $E_1=2m$. Произвольный элемент g множества E_{n+1} получается из некоторого элемента h множества E_n умножением справа на некоторый символ a_ν^ε, $\nu=1,\dots,m$, $\varepsilon=\pm 1$. Из одного элемента $h\in E_n$, $(n>0)$ таким образом можно получить ровно $2m-1$ элементов вида $h a_\nu^\varepsilon$, принадлежащих множеству E_{n+1}. Следовательно,

$$|E_{n+1}| = (2m-1)|E_n|, \quad n=1,2,\dots$$

Лемма доказана.

Рассмотрим случайное блуждание на множестве неотрицательных целых чисел с матрицей переходных вероятностей вида

$$M = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| \qquad (2.3)$$

где $p,q>0$, $p+q=1$. Обозначим через $m_{k,s}^{(n)}(p)$ вероятность перехода из состояния k в состояние s за n шагов, а через $\mu_{g,h}^{(n)}$ – как и ранее, вероятность перехода из элемента g в элемент h за n шагов при блуждании на группе F_m, построенном по мере μ. Положим в (2.3) $p=(2m-1)/2m$, $q=1/2m$.

ЛЕММА 2.2. Если $\partial(g^{-1}h)=s$ и $s\geq 1$, то

$$\mu_{g,h}^{(n)} = \frac{m_{0,s}^{(n)}(p)}{2m(2m-1)^{s-1}} \qquad (2.4)$$

В противном случае

$$\mu_{g,h}^{(n)} = m_{0,0}^{(n)}(p) \qquad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, во-первых, что $\mu_{g,h}^{(n)}$ зависит только от чисел n и $\partial(g^{-1}h)$. Действительно, $\mu_{g,h}^{(n)}=\mu_{e,g^{-1}h}^{(n)}$, а так как вероятности образующих элементов $a_{\nu}^{\varepsilon}, \varepsilon=\pm 1$ в нашем случае равны, то

$$\mu_{e,g}^{(n)}=\mu_{e,h}^{(n)}$$

если $\partial(g)=\partial(h)$. Поэтому при простом блуждании на группе F_m, начавшемся в единице e, в n -ый момент времени $(n>1)$ длина случайного элемента

$$g_n=x_1\cdots x_n$$

с вероятностью $(2m-1)/2m$ увеличится на I, а с вероятностью $1/2m$ уменьшится на ту же величину. Следовательно вероятность того, что $\partial(g_n)=s$ совпадает с $m_{0,s}^{(n)}(\varphi)$, а значит, имеют место формулы (2,4), (2.5). Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Имеем

$$-\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mu_{e,g}^{(n)}\log\mu_{e,g}^{(n)}\sim-\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n}2m(2m-1)^{s-1}\frac{m_{0,s}^{(n)}(p)}{2m(2m-1)^{s-1}}\log\frac{m_{0,s}^{(n)}(p)}{2m(2m-1)^{s-1}}\sim$$

$$\sim\log(2m-1)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{s=0}^{n}s\,m_{0,s}^{(n)}(p)}-\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n}m_{0,s}^{(n)}(p)\log m_{0,s}^{(n)}(p)$$

Покажем, что выражение

$$-\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n}m_{0,s}^{(n)}(p)\log m_{0,s}^{(n)}(p)$$

стремится к нулю. Действительно

$$0\leq-\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n}m_{0,s}^{(n)}(p)\log m_{0,s}^{(n)}\leq-\max_{0\leq s\leq n}m_{0,s}^{(n)}(p)\log\left[\max_{0\leq s\leq n}m_{0,s}^{(n)}(p)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Последний факт следует, например, из формул (3.8), (3.9), которые будет доказаны в § 3 главы I, Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n} s\, m_{0,s}^{(n)}(p)$$

Имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n} s\, m_{0,s}^{(n)}(p)=\frac{1}{n}\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|<\varepsilon} s\, m_{0,s}^{(n)}(p)+\frac{1}{n}\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|\geq\varepsilon} s\, m_{0,s}^{n}(p)$$

Но

$$\frac{1}{n}\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|\geq\varepsilon} s\, m_{0,s}^{(n)}(p)\leq\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|\geq\varepsilon} m_{0,s}^{(n)}(p)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ибо

$$m_{0,s}^{n}=\sum_{g:\,\partial(g)=s}\mu_{e,g}^{(n)}$$

а длина случайного элемента в n - ый момент времени с вероятностью I эквивалентна $\frac{m-1}{m}n$.

С другой стороны

$$\left(\frac{m-1}{m}-\varepsilon\right)\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|<\varepsilon} m_{0,s}^{(n)}(p)\leq\frac{1}{n}\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|<\varepsilon} s\, m_{0,s}^{(n)}(p)\leq\left(\frac{m-1}{m}+\varepsilon\right)\sum_{s:\left|\frac{s}{n}-\frac{m-1}{m}\right|<\varepsilon} m_{0,s}^{(n)}(p)$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n} s\, m_{0,s}^{(n)}(p)=\frac{m-1}{m}$$

Теорема доказана.

§ 3. Метод ортогональных многочленов в задачах блуждания с отражающим экраном

Пусть нам задан процесс случайного блуждания на множестве неотрицательных чисел с матрицей переходных вероятностей вида

$$M = \begin{Vmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \qquad (3.1)$$

где $q_n + p_n + r_n = 1,\ q_n > 0,\ p_n > 0,\ r_n \geq 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, и $r_0 + p_0 = 1$.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$x Q_k(x) = q_k Q_{k-1}(x) + r_k Q_k(x) + p_k Q_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (3.2)$$

с начальными условиями $Q_0(x) \equiv 1$, $Q_1(x) = (x - r_0)/p_0$.

Известно [14], что существует неубывающая и постоянная функция $\sigma(x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$ такая, что

$$\int_{-1}^{1} Q_k(x) Q_s(x) d\sigma(x) \begin{cases} = 0 \text{ при } k \neq s \\ > 0 \text{ при } k = s \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.3)$$

О функциях $Q_k(x),\ k = 1, 2, \ldots$, обладающих свойством (3.3) говорят, что они являются ортогональными многочленами относительно распределения $\sigma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Функция $\sigma(x)$ единственна с точностью до аддитивной постоянной. Эта общая теорема позволяет получить явные выражения для вероятностей $m_{k,s}^{(n)}$. В самом деле уравнения (3.2) можно переписать в виде

$$x Q_k(x) = \sum_{r=0}^{\infty} m_{k,r} Q_r(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.4)$$

Умножая обе части на x и подставляя в (3.2), получим

$$x^2 Q_K(x) = \sum_{r=0}^{\infty} m_{K,r} \sum_{s=0}^{\infty} m_{r,s} Q_s(x) = \sum_{s=0}^{\infty} m_{K,s}^{(2)} Q_s(x), \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

Продолжая таким же образом, переходим к соотношениям

$$x^n Q_K(x) = \sum_{r=0}^{\infty} m_{K,r}^{(n)} Q_r(x)$$

Умножая обе части последнего соотношения на $Q_S(x)$ и интегрируя их на интервале $[-1, 1]$ по $d\sigma(x)$, мы находим, воспользовавшись соотношениями ортогональности (3.3), что

$$\int_{-1}^{1} x^n Q_K(x) Q_S(x) d\sigma(x) = \sum_{r=0}^{\infty} m_{K,r}^{(n)} \int_{-1}^{1} Q_r(x) Q_S(x) d\sigma(x) = m_{K,r}^{(n)} \int_{-1}^{1} Q_S^2(x) d\sigma(x)$$

откуда следует окончательная формула

$$m_{K,S}^{(n)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^n Q_K(x) Q_S(x) d\sigma(x)}{\int_{-1}^{1} Q_S^2(x) d\sigma(x)} \tag{3.5}$$

Заметим, что для произвольной матрицы вида (3.I)

$$\int_{-1}^{1} Q_S^2(x) d\sigma(x) = \frac{q_0 \cdots q_S}{p_0 \cdots p_S}$$

В дальнейшем нас будет интересовать частный случай этой схемы, а именно случай матрицы (2.3). Ортогональные многочлены $Q_K(x)$ при этом определяются выражением

$$Q_K(x) = (p-q)\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^K \frac{\sin(K+1)\theta}{\sin\theta} + 2q\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^K \cos K\theta, \quad 2\sqrt{pq}\cos\theta = x \tag{3.6}$$

а функция $\sigma(x)$ определяется следующим образом: если $p \geqslant 1/2$, то $\sigma(x)$ постоянная вне $[-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]$, а в самом интервале

$$d\sigma(x) = \frac{c\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx \qquad c = \frac{p}{\pi} \tag{3.7}$$

Если же $p < 1/2$, то $\sigma(x)$ сохраняет свой вид внутри отрезка $[-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]$, а в точках $-1, 1$ появляются скачки величины $(1-2p)/2q$.

$d\sigma(x) = c\,(2\sqrt{pq})^2 \sin^2\theta \; d\theta$ на $[\pi, 2\pi]$.

Константа C служит в качестве нормирующего множителя, обеспечивающего равенство единице интеграла

$$\int_{-1}^{1} d\sigma(x)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Вероятности переходов $m^{(n)}_{k,s}(p)$ случайного блуждания на множестве неотрицательных чисел, с матрицей переходов (2.3), при $p \geq q$ определяются из соотношений

$n=0$? $k-s$ – нечет?

$$m^{(n)}_{k,s}(p) = (\sqrt{pq})^{n}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{k-s}\left\{\binom{n}{\frac{n+k-s}{2}} + \frac{q}{p}\binom{n}{\frac{n+k+s}{2}} - \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\frac{n-k-s}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{t}\binom{n}{\frac{n+k+s+2t}{2}}\right\} \qquad (3.8)$$

$-n \leq k-s \leq n$

если $s>0$ и

$$m^{(n)}_{k,0}(p) = p(\sqrt{pq})^{n}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{k}\left\{\frac{1}{p}\binom{n}{\frac{n+k}{2}} - \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^{t}\binom{n}{\frac{n+k+2t}{2}}\right\} \qquad (3.9)$$

$-n \leq k \leq n$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся при вычислениях формулой (3.5), где $Q_k(x)$ и $\sigma(x)$ находятся из (3.6), (3.7). Имеем

?

$$\int_{-1}^{1} x^{n} Q_k(x) Q_s(x)\, d\sigma(x) = C(2\sqrt{pq})^{n+2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{k+s}\Bigg[(p-q)^{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos^{n}\theta\,\frac{\sin(k+1)\theta\,\sin(s+1)\theta}{1-4pq\cos^{2}\theta}\,d\theta +$$

$$(p-q)2q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^{n}\theta\,\frac{\sin(k+1)\theta\,\cos s\theta\,\sin\theta}{1-4pq\cos^{2}\theta}\,d\theta + (p-q)2q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^{n}\theta\,\frac{\cos k\theta\,\sin(s+1)\theta\,\sin\theta}{1-4pq\cos^{2}\theta}\,d\theta +$$

$$(2q)^{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos^{n}\theta\,\frac{\cos k\theta\,\cos s\theta\,\sin^{2}\theta}{1-4pq\cos^{2}\theta}\,d\theta\Bigg]$$

а

$$\int_{-1}^{1} Q_s^{2}(x)\, d\sigma(x) = p\left(\frac{q}{p}\right)^{s} \;?$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках обозначим через $J_n(k,s)$.

Преобразуем $J_n(k,s)$ следующим образом

$$J_n(k,s)=\frac{(p-q)^2}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{\cos(k-s)\theta-\cos(k+s+2)\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+$$

$$+2(p-q)q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{[\sin(k+1)\theta\cos s\theta+\sin(s+1)\theta\cos k\theta]\sin\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+$$

$$+2q^2\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{[\cos(k-s)\theta+\cos(k+s)\theta]\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta$$

Пользуясь тем, что

$$\sin(k+1)\theta\cos s\theta+\sin(s+1)\theta\cos k\theta=[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta]\cos s\theta+$$

$$+(\sin s\theta\cos\theta+\cos s\theta\sin\theta)\cos k\theta=\sin(k+s)\theta\cos\theta+[\cos(k-s)\theta+\cos(k+s)\theta]\sin\theta$$

окончательно получаем

$$J_n(k,s)=\frac{(p-q)^2}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{\cos(k-s)\theta-\cos(k+s+2)\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+(p-q)q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{\sin(k+s)\theta\sin2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+$$

$$2(p-q)q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{[\cos(k-s)\theta+\cos(k+s)\theta]\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+2q^2\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{[\cos(k-s)\theta+\cos(k+s)\theta]\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta=$$

$$\frac{(p-q)^2}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{\cos(k-s)\theta-\cos(k+s+2)\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+(p-q)q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{\sin(k+s)\theta\sin2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta+$$

$$2pq\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\,\frac{[\cos(k-s)\theta+\cos(k+s)\theta]\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta$$

Заметим, что выражение $J_n(k,s)$ есть линейная комбинация интегралов вида

$$J_n^k(f)=\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\cos k\theta f(\theta)\,d\theta,\quad R_n^k(f)=\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\sin k\theta f(\theta)\,d\theta \qquad (3.10)$$

где

$$f(\theta)=\frac{1}{1-4pq\cos^2\theta}$$

ЛЕММА 3.1. Для произвольной функции $f(\theta)\in L_1(\pi,2\pi)$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\cos k\theta f(\theta)d\theta=2^{-n}\sum_{p=k-n}^{k+n}A_0^p\binom{n}{\frac{n+k-p}{2}} \qquad (3.11)$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta\sin k\theta f(\theta)d\theta=2^{-n}\sum_{p=k-n}^{k+n}B_0^p\binom{n}{\frac{n+k-p}{2}} \qquad (3.12)$$

где

$$A_0^p=\int_{\pi}^{2\pi}\cos p\theta f(\theta)d\theta$$

$$B_0^p=\int_{\pi}^{2\pi}\sin p\theta f(\theta)d\theta$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части тождеств

$$\cos\theta\cos(k-1)\theta=\frac{1}{2}[\cos(k-2)\theta+\cos k\theta]$$

перевірити!

$$\cos\theta\sin(k-1)\theta=\frac{1}{2}[\sin k\theta+\sin(k-2)\theta]$$

на $\cos^n\theta f(\theta)$ и проинтегрируем их на отрезке $[\pi,2\pi]$

Получим рекурентные соотношения

$$J_{n+1}^{k-1}=\frac{1}{2}[J_n^{k-2}+J_n^k],\quad R_{n+1}^{k-1}=\frac{1}{2}[R_n^{k-2}+R_n^k]$$

Вводя новые величины $A_n^k=2^nJ_n^k,\ B_n^k=2^nR_n^k$, получаем соотношения на $A_n^k,\ B_n^k$

$$A_{n+1}^{k-1}=[A_n^{k-2}+A_n^k],\quad B_{n+1}^{k-1}=[B_n^{k-2}+B_n^k]$$

Если $A_0^0=1$ и $A_0^{\pm1}=0,\ A_0^{\pm2}=0,\ \dots$, то по формуле общего члена треугольника Паскаля находим

A_0^p

1
1 2 1
1 3 3 1

0 0 1 0 0 0
1 0 1 0 0
0 0 2 0 1 0

$$A_n^k = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

где

$$\binom{n}{\frac{n+k}{2}} = 0$$

если $n+k$ нечетно. Отсюда видно, что в общем случае числа A_n^k и B_n^k оказываются линейными комбинациями биномиальных коэффициентов и могут быть вычислены по формулам

$$A_n^k = \sum_{p=k-n}^{k+n} A_0^p \binom{n}{\frac{n+k-p}{2}}$$

$$B_n^k = \sum_{p=k-n}^{k+n} B_0^p \binom{n}{\frac{n+k-p}{2}}$$

Лемма доказана.

Заметим, что в том случае, когда функция $\hat{f}(z) = f(\theta)$, где $z = e^{i\theta}$, голоморфна в окрестности единичной окружности, а функция $f(\theta)$ периодична с периодом π, числа $\frac{1}{\pi} A_0^p$, $\frac{1}{\pi} B_0^p$ являются коэффициентами Фурье функции $f(\theta)$ и, следовательно, могут быть найдены через коэффициенты C_n разложения функции $\hat{f}(z)$ в ряд Лорана в окрестности единичной окружности по формулам

$$2C_n = \frac{A_0^n - i B_0^n}{2\pi} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

$$2C_n = \frac{A_0^{-n} + i B_0^{-n}}{2\pi} \qquad n = -1, -2, \ldots \tag{3.14}$$

Пусть

$$f_1(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1 - 4pq\cos^2\theta}$$

$$f_2(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{1 - 4pq\cos^2\theta}$$

$$f_3(\theta) = \frac{1}{1-4pq\cos^2\theta}$$

Найдем коэффициенты Фурье функций $f_i(\theta)$, $i=1,2,3$. С этой целью проделаем замены

$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

и разложим функции

$$\hat{f}_1(z) = \frac{1}{4}\,\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{pqz^4 + (2pq-1)z^2 + pq}$$

$$\hat{f}_2(z) = -\frac{1}{2i}\,\frac{z^4 - 1}{pqz^4 + (2pq-1)z^2 + pq}$$

$$\hat{f}_3(z) = \frac{-z^2}{pqz^4 + (2pq-1)z^2 + pq}$$

в ряд Лорана в кольце

$$\frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2\sqrt{pq}} < |z| < \frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2\sqrt{pq}} \tag{3.15}$$

Так как $p+q=1$, $p \geqslant q$, то $\sqrt{1-4pq} = p-q$ и, следовательно (3.15) можно переписать в следующем виде

$$\sqrt{\frac{q}{p}} < |z| < \sqrt{\frac{p}{q}}$$

Имеем

$$\hat{f}_1(z) = \frac{1}{4pq}\left[1 - \frac{(1-4pq)z^2}{pq\left(z^2-\frac{p}{q}\right)\left(z^2-\frac{q}{p}\right)}\right] = \frac{1}{4pq}\left[1 - (p-q)z^2\left(\frac{1}{z^2-\frac{p}{q}} - \frac{1}{z^2-\frac{q}{p}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4pq}\left\{1 \overset{+}{-} (p-q)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right]\right\} = \frac{1}{4pq}\left\{1+(p-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right\} \qquad (3.16)$$

$$\hat{f}_2(z) = -\frac{1}{2ipq}\left[1 + \frac{(1/pq-2)z^2-2}{\left(z^2-\frac{p}{q}\right)\left(z^2-\frac{q}{p}\right)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2ipq}\left\{1 - \left(\frac{1}{pq}-2\right)\frac{pq}{p-q}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{2pq}{z^2(p-q)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right]\right\}$$

Пользуясь тем, что

$$-\left(\frac{1}{pq}-2\right)\frac{pq}{p-q} + \frac{2pq}{p-q}\,\frac{p}{q} = 1$$

получаем, что

$$= -\frac{1}{2ipq}\left[1 \overset{?}{+} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right]$$

$$\hat{f}_2(z) = -\frac{1}{2ipq}\left[1 \overset{(+)?}{-} \sum_{n=1}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right] \qquad (3.17)$$

Наконец

$$\hat{f}_3(z) = -\frac{z^2}{p-q}\left[\frac{1}{z^2-\frac{p}{q}} - \frac{1}{z^2-\frac{q}{p}}\right] = \frac{1}{p-q}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n}\right] \qquad (3.18)$$

$$= \frac{1}{p-q}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(z\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2n},$$

Обозначим через ${}^{i}A_0^{k}$ числа $\mathcal{J}_0^{k}(f_i)$. Тогда из разложений (3.16), ~~(3.17)~~, (3.18) и формул (3.13), (3.14) следует, что

$$\begin{cases} {}^{1}A_0^{2k} = -\pi\frac{p-q}{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^k \text{ при } k \neq 0 & \quad \frac{\pi(p-q)}{4pq}\left(\frac{q}{p}\right)^k \\ {}^{1}A_0^{2k+1} = 0 & \\ {}^{1}A_0^{0} = \pi\frac{2}{p} & \quad \pi\frac{1}{4pq}[1+p-q] = \frac{\pi}{2q}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^{2}A_0^{2K} = \pi_i \dfrac{p-q}{pq}\left(\dfrac{q}{p}\right)^K & \text{при } K \neq 0 \\ {}^{2}A_0^{2K+1} = 0 & \\ {}^{2}A_0^{0} = \pi_i \dfrac{2}{pq} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^{3}A_0^{2K} = \pi \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{q}{p}\right)^K & \text{при } K \neq 0 \\ {}^{3}A_0^{2K+1} = 0 & \\ {}^{3}A_0^{0} = \pi \dfrac{1}{p-q} & \end{cases}$$

Вычислим выражение $J_n(K,S)$.

Представим $J_n(K,S)$ в виде суммы $J_n^1(K,S) + J_n^2(K,S)$, где

$$J_n^1(K,S) = \int_{\pi}^{2\pi} \cos^n\theta \, \frac{\frac{1}{2}(p-q)^2 + 2pq\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta} \cos(K-m)\theta \, d\theta$$

$$J_n^2(K,S) = -\frac{(p-q)^2}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \cos^n\theta \, \frac{\cos(K+S+2)\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\, d\theta + 2pq\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta \, \frac{\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\, d\theta +$$

$$+(p-q)q\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta \, \frac{\sin 2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\sin(K+S)\theta \, d\theta$$

При $K \neq S$

$$J_0^1(K,S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(p-q)^2 + 2pq\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\cos(K-S)\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{K-S}\left\{\frac{2(p-q)^2}{2(p-q)} - \frac{2pq(p-q)}{2pq}\right\} = 0$$

а при $K = S$

$$J_0^1(K,S) = \frac{1}{2}2\pi\left\{\frac{2(p-q)^2}{2(p-q)} - \frac{2pq(p-q)}{2pq}\right\} = \pi$$

Следовательно

$$J_n^1(K,S) = \pi 2^{-n}\binom{n}{\frac{n+K-S}{2}}$$

Пользуясь формулой (3.II), находим

$$\mathcal{J}_n^2(k,s) = \frac{2\pi}{2} 2^{-n}\left\{-\frac{(p-q)^2}{2}\sum_{t=k+s-n+2}^{k+s+n+2} {}^3A_0^t \binom{n}{\frac{n+k+s+2-t}{2}} +\right.$$

$$\left.+\sum_{t=k+s-n}^{k+s+n}\left[2pq\,{}^1A_0^t + (p-q)q\,{}^2A_0^t\right]\binom{n}{\frac{n+k+s-t}{2}}\right\} =$$

$$= \pi 2^{-n}\left\{-\frac{(p-q)^2}{2}\sum_{t=k+s-n}^{k+s+n} {}^3A_0^{t+2}\binom{n}{\frac{n+k+s-t}{2}} +\right.$$

$$\left.+\sum_{t=k+s-n}^{k+s+n}\left(2pq\,{}^1A_0^t + (p-q)q\,{}^2A_0^t\right)\binom{n}{\frac{n+k+s-t}{2}}\right\}$$

Так как при $t>0$

$$\frac{(p-q)^2}{2}\,{}^3A_0^{t+2} + 2pq\,{}^1A_0^t + (p-q)q\,{}^2A_0^t = 2\pi\left\{-\frac{(p-q)^2}{p-q}\frac{q}{p} - 2pq\frac{p-q}{2pq} + (p-q)q\frac{1}{pq}\right\} = 0$$

$$\frac{(p-q)^2}{2}\,{}^3A_0^0 + 2pq\,{}^1A_0^{-2} + (p-q)q\,{}^2A_0^{-2} = 2\pi\left[-\frac{(p-q)^2}{2}\frac{2}{p-q} - 2pq\frac{p-q}{2pq}\frac{q}{p} -\right.$$

$$\left.-(p-q)q\frac{1}{pq}\frac{q}{p}\right] = -2\pi(p-q)\frac{p^2+pq+q}{pq} = -2\pi\frac{p-q}{pq}\frac{q}{p}$$

и при $t<-2$

$$\frac{(p-q)^2}{2}\,{}^3A_0^{t+2} + 2pq\,{}^1A_0^t + (p-q)q\,{}^2A_0^t = 2\pi\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^t\left\{-\frac{(p-q)^2}{p-q}\frac{p}{q} - (p-q) -\right.$$

$$\left.-\frac{(p-q)q}{pq}\right\} = -2\pi\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^t(p-q)\frac{p^2+pq+q}{pq} = -2\pi\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^t\frac{p-q}{pq}$$

то

$$\mathcal{J}_n^2(k,s) = C\pi 2^{-n}\left\{\frac{q}{p}\binom{n}{\frac{n+k+s}{2}} - \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\frac{n-k-s}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^t\binom{n}{\frac{n+k+s-2t}{2}}\right\}$$

Вычислим теперь нормирующую константу C. Имеем

$$\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} \frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{1-4pq\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{p} \tag{3.19}$$

Чому

Следовательно, $c = p/\pi$. Выразив $\mathcal{J}_n(k,s)$ через $\mathcal{J}_n^1(k,s), \mathcal{J}_n^2(k,s)$, а также приняв во внимание (3.I9), получаем формулы (3.8), (3.9). Предложение I доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $P_{g,h}^n$ – вероятность перехода за n шагов из состояния g в состояние h при простом блуждании на группе F_m. Если $\partial(g^{-1}h)=s$ и $s\geq 1$, то

$$P_{g,h}^n = \left(\frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\right)^{n+1} \frac{1}{(\sqrt{2m-1})^{s-1}} \left\{ \binom{n}{\frac{n+s}{2}} - \frac{4(m-1)m}{2m-1} \sum_{t=1}^{\frac{n-s}{2}} \left(\frac{1}{2m-1}\right)^t \binom{n}{\frac{n+s+2t}{2}} \right\}$$

В противном случае

$$P_{g,h}^n = \left(\frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\right)^{n} \left\{ \binom{n}{\frac{n}{2}} - 2(m-1) \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2m-1}\right)^t \binom{n}{\frac{n+2t}{2}} \right\}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться формулами (3.8), (3.9) при $p=(2m-1)/2m$, $q=1/2m$, а также формулами (2.4), (2.5).

§ 4. Асимптотика по n суммы $M_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n} m_{0,k}^{(n)}(p)\,\theta^k$

ЛЕММА 4.I. При $s>0$ и $p\geq q$

$$\frac{2}{p}\,\frac{s}{n+s+2}(\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \binom{n}{\frac{n-s}{2}} \leq m_{0,s}^{(n)}(p) \leq \frac{1}{p}(\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \binom{n}{\frac{n-s}{2}}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$(\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \left\{ \binom{n}{\frac{n-s}{2}} + \frac{q}{p}\binom{n}{\frac{n+s}{2}} - \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\frac{n-s}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^t \binom{n}{\frac{n+s-2t}{2}} \right\} \leq \frac{1}{p}(\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \binom{n}{\frac{n-s}{2}}$$

С другой стороны при $s>0$ и $p\geq q$

$$m_{0,s}^{(n)}(p) \geq (\sqrt{pq})^n \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \left\{ \frac{1}{p}\binom{n}{\frac{n-s}{2}} - \frac{p-q}{pq}\binom{n}{\frac{n-s-2}{2}} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^t \right\} =$$

$$= \frac{1}{p}(\sqrt{pq})^n \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \left\{ \binom{n}{\frac{n-s}{2}} - \binom{n}{\frac{n-s-2}{2}} \right\} = \frac{1}{p}(\sqrt{pq})^n \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \binom{n}{\frac{n-s}{2}} \Big[1 -$$

$$- \binom{n}{\frac{n-s-2}{2}} \Big/ \binom{n}{\frac{n-s}{2}} \Big] = \frac{2}{p}\,\frac{s}{n+s+2}(\sqrt{pq})^n \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^s \binom{n}{\frac{n-s}{2}}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть θ – положительная константа. Тогда при $0 < \theta \leq \sqrt{\frac{q}{p}}$

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{n} m_{0,k}^{(n)}(p)\theta^k \Big]^{\frac{1}{n}} = 2\sqrt{pq} \tag{4.1}$$

а при $\theta > \sqrt{\frac{q}{p}}$

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{n} m_{0,k}^{(n)}(p)\theta^k \Big]^{\frac{1}{n}} = \sqrt{pq}\left(\theta\sqrt{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{p}{q}}\right) \tag{4.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатом предыдущей леммы. Тогда

$$\sqrt{pq} \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+k+2}\left(\theta\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \Big]^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \big[M_n(\theta) \big]^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq \sqrt{pq} \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\theta\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \Big]^{\frac{1}{n}}$$

Заметим, что при $0 < \theta \leq \sqrt{\frac{q}{p}}$, и n нечетном

$$\sqrt{pq} \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{1}{n+3} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \Big]^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \big[M_n(\theta) \big]^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{pq} \lim \Big[n \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \Big]^{\frac{1}{n}}$$

а при n четном,

$$\sqrt{pq} \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{1}{n+4} \binom{n}{\frac{n-4}{2}} \Big]^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \big[M_n(\theta) \big]^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{pq} \lim_{n\to\infty} \Big[n \binom{n}{\frac{n}{2}} \Big]^{\frac{1}{n}}$$

Следовательно, если $\theta \leq \sqrt{\frac{q}{p}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left[M_n(\theta)\right]^{\frac{1}{n}}=2\sqrt{pq}$$

Предположим теперь, что $\theta\sqrt{\frac{q}{p}}>1$. Пусть $\xi=\theta\sqrt{\frac{p}{q}}$ и

$$b_n(k,\xi)=\xi^k\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

Если $n-k$ четно, то

$$\frac{b_n(k+2,\xi)}{b_n(k,\xi)}=\xi^2\frac{n-k}{n+k}$$

Следовательно,

$$\frac{b_n(k+2,\xi)}{b_n(k,\xi)}>1 \qquad \text{при} \quad 0\leqslant k\leqslant\frac{(\xi^2-1)n-2}{\xi^2+1}$$

и

$$\frac{b_n(k+2,\xi)}{b_n(k,\xi)}<1 \qquad \text{при} \quad \frac{(\xi^2-1)n-2}{\xi^2+1}<k\leqslant n$$

Введем следующие обозначения

$$\beta=\left[\frac{(\xi^2-1)n-2}{\xi^2+1}\right];\ \gamma(n)=\frac{(\xi^2-1)n}{\xi^2+1}$$

Тогда

$$\sqrt{pq}\lim_{n\to\infty}\left[\max_{\beta-1\leqslant k\leqslant\beta+1}\frac{k}{n+k+2}\xi^k\binom{n}{\frac{n-k}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[M_n(\theta)\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{pq}\left[\lim_{n\to\infty}n\max_{\beta-1\leqslant k\leqslant\beta+1}\xi^k\binom{n}{\frac{n-k}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Известно [15] , что если $p,q>0$, $p+q=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{pn}\right]^{\frac{1}{n}}=p^{-p}q^{-q}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left[M_n(\theta)\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\xi^{\gamma(n)}\binom{n}{\frac{n-\gamma(n)}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \xi^{\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}}\left(\frac{1}{\xi^2+1}\right)^{-\frac{1}{\xi^2+1}}\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+1}\right)^{-\frac{\xi^2}{\xi^2+1}} = \theta\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{q}{p}}$$

Лемма доказана.

Заметим, что в предельном поведении суммы $M_n(\theta)$ наблюдается явление типа фазового перехода. Следующей леммой мы воспользуемся при выводе критерия возвратности простого блуждания на однородном пространстве свободной группы.

ЛЕММА 4.3. Пусть a_n произвольная последовательность неотрицательных чисел и $p>q$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} m_{0k}^{(n)}(p)\frac{a_k}{(2m-1)^k}$$

расходится тогда, и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k} \tag{4.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} m_{0,k}^{(n)}(p)\frac{a_k}{(2m-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}\sum_{n=k}^{\infty} m_{0k}^{(n)}(p) =$$

$$= p a_0\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\left\{\frac{1}{p}\binom{n}{\frac{n}{2}} - \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^t\binom{n}{\frac{n-2t}{2}}\right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\left\{\frac{1}{p}\binom{n}{\frac{n-k}{2}} - \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)^t\binom{n}{\frac{n-k-2t}{2}}\right\} =$$

$$= a_0\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n}{2}} - \frac{p-q}{q}a_0\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^t\sum_{n=2t}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n-2t}{2}} +$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n-k}{2}} -$$

$$-\frac{p-q}{pq}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^t\sum_{n=2t+k}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n-k-2t}{2}}$$

Воспользуемся известным соотношением [1]

$$\sum_{n=k}^{\infty}(\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n-k}{2}} = \frac{1}{p-q}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^k$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} m_{0,k}^{(n)}(p)\frac{a_k}{(2m-1)^k} = \frac{a_0}{p-q} - a_0\frac{p-q}{q}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^t\frac{1}{p-q}\left(\frac{q}{p}\right)^t +$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k\frac{1}{p-q}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^k -$$

$$-\frac{p-q}{pq}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^k\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^t\frac{1}{p-q}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{k+2t} =$$

$$= \frac{a_0 p}{p-q} + \frac{1}{p-q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(2m-1)^k}$$

Лемма доказана.

ГЛАВА 2

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС ПЕРЕХОДНОГО ОПЕРАТОРА НА ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ I. Показатель роста подгруппы свободной группы

Фиксируем группу F_m и множество $a_1,\dots,a_m$ её свободных образующих.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Показателем роста $\alpha_H^{a_1,\dots,a_m}$ группы $H\subset F_m$ относительно образующих $a_1,\dots,a_m$ называется величина, обратная к радиусу сходимости ряда

$$H(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|H_n|x^n$$

где H_n – множество элементов длины n группы H. Показатель роста группы F_m относительно произвольного набора свободных образующих $\{a_i\}$ в силу леммы 2.I из главы I равен $2m-1$. Следовательно

$$1\leqslant \alpha_H^{a_1,\dots,a_m}\leqslant 2m-1 \tag{I.I}$$

Показатель роста группы H, зависит от выбора образующих элементов группы F_m.

ПРИМЕР. Пусть $H\subset F_3$ – группа, порожденная элементами a_1,a_2, где a_1,a_2,a_3 – множество образующих элементов группы F_3. Тогда

$$\alpha_H^{a_1,a_2,a_3}=\alpha_{F_2}^{a_1,a_2}=3$$

Покажем, что показатель роста группы H относительно образующих a_1a_3,a_2,a_3 отличен от 3. С этой целью обозначим $b_1=a_1a_3$, $b_2=a_2$, $b_3=a_3$ и вычислим показатель роста группы $\widetilde{H}\subset F_3$, порожденной элементами $b_1b_3^{-1},b_2$ относительно образующих

b_2, b_3. Обозначим множество слов длины n группы $\widetilde{H}$, оканчивающихся одним из слов $b_1 b_3^{-1}$ или $b_3 b_1^{-1}$, через $H_n^{(1)}$, а одним из слов b_2 или b_2^{-1}, через $H_n^{(2)}$, $n=1,2,\ldots$. Тогда

$$H_n^{(1)} = H_{n-2}^{(1)} + 2H_{n-2}^{(2)}$$

$$H_n^{(2)} = 2H_{n-1}^{(1)} + H_{n-1}^{(2)}$$

Переходя к производящим функциям $H^{(1)}(x), H^{(2)}(x)$ чисел $|H_n^{(1)}|, |H_n^{(2)}|$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} H^{(1)}(x) = 2x^2 + x^2 H^{(1)}(x) + 2x^2 H^{(2)}(x) \\ H^{(2)}(x) = 2x + 2x H^{(1)}(x) + x H^{(2)}(x) \end{cases}$$

Следовательно, если обозначить через $\widetilde{H}(x)$ производящую функцию группы $\widetilde{H}$ относительно образующих b_1, b_2, b_3, то

$$\widetilde{H}(x) = 1 + H^{(1)}(x) + H^{(2)}(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{-3x^3 - x^2 - x + 1}$$

Так как $1/3$ не есть корень уравнения

$$-3x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

то

$$\alpha_H^{a_1, a_2, a_3} \neq \alpha_H^{a_1 a_3, a_2, a_3}$$

Несмотря на отмеченное обстоятельство, в дальнейшем, мы будем опускать верхние индексы при α и рассматривать показатели роста произвольной подгруппы группы F_m относительно фиксированного набора образующих элементов $\{a_i\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. Показатель роста нетривиального нормального делителя H группы F_m ограничен снизу константой $\sqrt{2m-1}$, т.е.

$$\alpha_H \geq \sqrt{2m-1} \tag{I.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W \in H$, где W - несократимое слово в символах a_ν^ε, $\nu = 1, \ldots, m$, $\varepsilon = \pm 1$.

Рассмотрим множество слов вида $a_\nu^\varepsilon W a_\nu^{-\varepsilon}$.

В этом множестве хотя бы $2m-2$ слов несократимы, все они принадлежат группе H и их длина равна $\partial(W)+2$. Пусть W_1 - какое-нибудь из этих слов.

Множество $\{a_\nu^\varepsilon W_1 a_\nu^{-\varepsilon}\}$, $\nu = 1, \ldots, m$, $\varepsilon = \pm 1$ содержит ровно $2m-1$ несократимых слов длины $\partial(W)+4$.

Выбрав произвольное слово W_2 из этого множества, мы можем применить к нему те же рассуждения и получить еще $2m-2$ несократимых слов длины $\partial(W)+6$ и т.д.

В результате мы получили бесконечное множество $\mathcal{E}(W) \subset H$ содержащее не менее чем

$$(2m-2)(2m-1)^{n-1}$$

слов длины $\partial(W)+2n$. Следовательно

$$\alpha_H \geqslant \lim_{n\to\infty}\left[(2m-2)(2m-1)^{n-1}\right]^{\frac{1}{\partial(W)+2n}} = \sqrt{2m-1}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Пусть H - нетривиальный нормальный делитель группы F_m. Тогда

$$|H_n||H_m| \leqslant |H_{n+m+2}| \tag{I.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in H_n$, $V \in H_m$. Можно подобрать такие ν и ε, что $a_\nu^\varepsilon U a_\nu^{-\varepsilon}$ - несократимое слово. При этом

$$\partial(a_\nu^\varepsilon U a_\nu^{-\varepsilon} V) = n+m+2$$

Сопоставляя каждой паре (U,V) несократимое слово $a_\nu^\varepsilon U a_\nu^{-\varepsilon} V$, мы получаем взаимно - однозначное отображение

$$\varphi: H_n \times H_m \to H_{n+m+2}$$

откуда и следует (I.3)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3. Пусть H – нетривиальный нормальный делитель группы F_m. Если не все элементы в H имеют четную длину, то существует предел

$$\alpha_H = \lim_{n\to\infty} |H_n|^{\frac{1}{n}}$$

В противном случае существует предел

$$\alpha_H = \lim_{n\to\infty} |H_{2n}|^{\frac{1}{2n}}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W, V \in H$, причем длина слова W четна, а длина слова V нечетна. Существует такое N, что при $n>N$

$$[\mathcal{E}(W) \cup \mathcal{E}(V)] \cap H_n \neq \varnothing$$

(определение множества $\mathcal{E}(W)$ было дано при доказательстве предложения I.I). Следовательно при $n \geqslant N$ числа $|H_n|$ отличны от нуля.

Для доказательства первой части предложения осталось воспользоваться тем, что если последовательность положительных чисел удовлетворяет условию

$$C_n C_K \leqslant C_{n+K+p}$$

где p фиксированное натуральное число, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{\frac{1}{n}} = \sup_n C_n^{\frac{1}{n+p}}$$

Вторая часть предложения доказывается аналогично.

§ 2. Непрерывность показателя роста сверху

Рассмотрим возрастающую последовательность $\{H^n\}$ подгрупп свободной группы, т.е. последовательность, удовлетворяющую условию

$$H^1 \subset H^2 \subset \cdots$$

Очевидно, что в этом случае

$$\alpha_{H^1} \leqslant \alpha_{H^2} \leqslant \cdots$$

Естественно спросить, будет ли совпадать показатель роста группы $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ с пределом

$$\alpha = \lim_{i \to \infty} \alpha_{H^i}$$

Что будет, если возрастающую последовательность подгрупп группы F_m заменить убывающей, т.е. такой, что

$$H^1 \supset H^2 \supset \cdots \quad ?$$

Полностью, мы ответим на первый вопрос в § I главы 4, где соответствующий результат будет использован при построении транзитивного действия группы F_2 на счетном множестве S, не обладающего инвариантной мерой и такого, что каждая подгруппа группы действует на S не свободно, а сейчас ограничимся случаем, когда H^n – последовательность нормальных делителей группы F_m.

ЛЕММА 2.I. Пусть α_H – показатель роста нормального делителя H группы F_m. Тогда

$$|H_n| \leqslant \alpha_H^{n+2} \qquad (2.I)$$

$n = 1, 2, \ldots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существуют $\varepsilon > 0$ и N такое, что

$$|H_N| > (\alpha_H^2 + \varepsilon)\alpha_H^N$$

Определим последовательность N_k натуральных чисел следующим образом: $N_1 = 2N+2,\ N_2 = 2N_1+2,\ \ldots,\ N_k = 2N_{k-1}+2,\ \ldots$.

Тогда

$$|H_{N_1}| \geq |H_N|^2 \geq (\alpha_H^2+\varepsilon)^2 \alpha_H^{2N}$$

$$|H_{N_2}| \geq |H_{N_1}|^2 > (\alpha_H^2+\varepsilon)^2 \alpha_H^{4N}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|H_{N_K}| \geq |H_N|^{2K} > (\alpha_H^2+\varepsilon)^{2^K} \alpha^{2^K N}$$

Следовательно

$$\overline{\lim_{K\to\infty}} |H_{N_K}|^{\frac{1}{N_K}} \geq \overline{\lim_{K\to\infty}} \left[(\alpha_H^2+\varepsilon)^{2^K} \alpha_H^{2^K N}\right]^{\frac{1}{N_K}} = (\alpha_H^2+\varepsilon)^x \alpha_H^y$$

где

$$x = \lim_{K\to\infty} \frac{2^K}{2^K N + 2^K + 2^{K-1} + \ldots + 1} = \frac{1}{N+2}$$

$$y = \lim_{K\to\infty} \frac{2^K N}{2^K N + 2^K + 2^{K-1} + \ldots + 1} = \frac{N}{N+2}$$

Итак,

$$\overline{\lim_{K\to\infty}} |H_{N_K}|^{\frac{1}{N_K}} \geq (\alpha_H^2+\varepsilon)^{\frac{1}{N+2}} \alpha_H^{\frac{N}{N+2}} > \alpha_H$$

Полученное противоречие и доказывает (2.I)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Пусть $\{H^n\}$ – возрастающая последовательность нормальных делителей группы F_m.

Тогда

$$\alpha_H = \lim_{n\to\infty} \alpha_{H^n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\alpha_{H^1} \leq \alpha_{H^2} \leq \cdots$$

то предел $\alpha_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{H^n}$ существует и не превосходит α_H.

Используя (2.I) получаем,

$$|H_n^K| \leqslant \alpha_{H^K}^{n+2} \leqslant \alpha_0^{n+2}$$

где H_n^K – множество элементов длины n в группе H^K, $n,K=1,2,\ldots$. Так как начиная с некоторого номера $K=K(n)$ множества H_n^K совпадают с множеством H_n, то

$$|H_n| \leqslant \alpha_0^{n+2}$$

и следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |H_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha_0$$

Неравенство

$$\lim_{n\to\infty} |H_n|^{\frac{1}{n}} \geqslant \alpha_0$$

очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. Пусть $\{\tau_n\}$ – последовательность спектральных радиусов простых случайных блужданий на группах $G_n \simeq F_m/H$, причем $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$, а τ – спектральный радиус простого блуждания на группе $G \simeq F_m/H$, где $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} H^n$. Тогда

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В следующем параграфе будет доказано, что спектральный радиус τ простого блуждания на группе $G \simeq F_m/_H$ и показатель роста группы H связаны соотношением

$$\tau = \frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\left(\frac{\alpha_H}{\sqrt{2m-1}} + \frac{\sqrt{2m-1}}{\alpha_H}\right) \tag{2.2}$$

из которого и следует наше утверждение.

Обратимся теперь к случаю, когда последовательность нормальных делителей убывает. Нетрудно привести пример, когда равенство

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{H^n} = \alpha_H$$

не выполняется. Действительно, пусть H^n – нормальный делитель группы F_2, порожденный элементами a^{2^n}, b^{2^n}, где a, b – образующие группы F_2, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $H^1 \supset H^2 \supset \cdots$, $\alpha_{H^n} \geqslant \sqrt{3}$, но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H^n = e$. Этот пример в некоторых отношениях неудовлетворителен. Может показаться, что скачок показателя роста происходит только в том случае, когда пересечение групп H^n тривиально.

Ольшанский предложил следующий пример.

Группа G называется финитно аппроксимируемой, если пересечение всех её нормальных подгрупп конечного индекса есть единичная группа. Известно [17], что свободное произведение финитно аппроксимируемых групп – финитно аппроксимируемая группа. Следовательно, финитно аппроксимируема группа $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m \simeq F_m / H_{n,m}$, где $H_{n,m}$ – нормальный делитель группы F_2 порожденный элементами a^n, b^m. Так как группа $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ не является аменабельной при $(n, m) \neq (2, 2)$, то спектральный радиус простого блуждания на этой группе меньше I.

Из формулы (2.2) следует, что если спектральный радиус простого блуждания на группе F_2 / H меньше I, то $\alpha_H < 3$. Следовательно $\alpha_{H_{n,m}} < 3$. В силу того, что группа $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ финитно аппроксимируема, существует счетная последовательность Q_K нормальных подгрупп конечного индекса группы F_2 такая, что

$$\bigcap_{K=1}^{\infty} Q_K = H_{n,m}$$

РАССМОТРИМ последовательность E_K нормальных подгрупп группы F_2, где

$$E_K = \bigcap_{i=1}^{K} Q_i$$

Последовательность E_K убывает и

$$\bigcap_{K=1}^{\infty} E_K = H_{n,m}$$

Из формулы (2.2) следует, что если H подгруппа конечного индекса в F_2, то $\alpha_H = 3$. Следовательно, $\alpha_{E^K} = 3$, в то время как $\alpha_{H_{n,m}} < 3$. Заметим, что этот пример также показывает, что аналог следствия 2.I в ситуации, когда последовательность нормальных подгрупп H^n убывает, неверен.

Как вычислить показатель роста подгруппы свободной группы?

Известно [17], что подгруппа свободной группы сама является свободной, причем множество $W_i(a_\nu)$ её свободных образующих можно выбрать таким образом, чтобы оно удовлетворяло следующим двум условиям.

Пусть $V(W_i)$ есть несократимое слово в символах W_i:

$$V(W_i) = W_{i_1}^{\varepsilon_1} W_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots W_{i_r}^{\varepsilon_r}, \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

(i) после полного сокращения слова $V(W_i(a_\nu))$ от каждого $W_{i_j}^{\varepsilon_j}$ остается хотя бы один a - символ $a_{\nu_j}^{\eta_j}$, $\eta_j = \pm 1$,

(ii) a - длина слова $V(W_i)$ не меньше a - длины любого W - символа, входящего в $V(W_i)$.

Множество образующих группы H, удовлетворяющие условиям (i),(ii), называется нильсеновским. Пусть $\beta(W_i^\mu, W_k^\varepsilon)$ обозначает число сиволов, которое можно удалить сокращениями из слова $W_i^\mu W_k^\varepsilon$, $\mu, \varepsilon = \pm 1$.

Введем следующую терминологию. Пусть $\{W_i(a_\nu)\}$ - произвольное множество непустых несократимых слов. Слова $W_i(a_\nu)$, $W_i^{-1}(a_\nu)$ будем называть W символами. Старшим началом непустого несократимого слова $W(a_\nu)$ назовем такое начало S слова $W(a_\nu)$, что

$$\frac{1}{2}\partial(W) < \partial(S) \leq \frac{1}{2}\partial(W) + 1$$