Аналогично определяется старший конец слова W .

Известно [17] , что если множество $\{W_i(a_\nu)\}$ непустых несократимых слов является нильсеновским, то старшее начало и старший конец любого слова W_i являются изолированными. Следовательно, числа $\partial(W_K^{\varepsilon}), \beta(W_K^{\varepsilon}, W_i^{\mu})$ и $\varepsilon,\mu=\pm 1$ удовлетворяют соотношениям

$$\partial(W_K^{\varepsilon}) \geqslant \beta(W_i^{\mu}, W_K^{\varepsilon})$$

$$\partial(W_K^{\varepsilon}) \geqslant \beta(W_K^{\varepsilon}, W_i^{\mu})$$

$i=1,2,\dots,\ \varepsilon,\mu=\pm 1.$

Будем говорить, что элемент U оканчивается словом W_K^{ε} , если

$$U \equiv W_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots W_{i_n}^{\varepsilon_n} W_K^{\varepsilon}$$

Пусть $H_n^{K,\varepsilon}$ – множество слов длины n в группе H , оканчивающихся словом W_K^{ε} и

$$H^{K,\varepsilon}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |H_n^{K,\varepsilon}|\, x^n$$

Тогда

$$H(x) = 1 + \sum_{K=1}^{\infty} \sum_{\varepsilon=\pm 1} H^{K,\varepsilon}(x) \tag{2.3}$$

ТЕОРЕМА 2.I. Функции $H^{K,\varepsilon}(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$H^{K,\varepsilon}(x) = x^{\partial(W_K^{\varepsilon})} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu=\pm 1} x^{\partial(W_K^{\varepsilon}) - \beta(W_m^{\mu}, W_K^{\varepsilon})} H^{m,\mu}(x) \tag{2.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in H_n^{K,\varepsilon}$. Тогда

$$U \equiv W_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots W_{i_n}^{\varepsilon_n} W_K^{\varepsilon}$$

Рассмотрим несократимое слово V такое, что

$$V \equiv W_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots W_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

Его длина равна

$$n-\partial(W_K^{\varepsilon})+\beta(W_m^{\mu},W_K^{\varepsilon})$$

если слово V оканчивается словом W_m^{μ}.

Следовательно

$$|H_n^{K,\varepsilon}|=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=\pm1}|H^{m,\mu}_{n-\partial(W_K^{\varepsilon})+\beta(W_m^{\mu},W_K^{\varepsilon})}| \qquad (2.5)$$

Умножив (2.5) на x^n и сложив полученные равенства при получим (2.4).

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если группа H конечно порождена, то $H(x)$ – ~~рациональная функция.~~

Действительно, линейная система (2.4) в этом случае состоит из конечного числа уравнений.

Итак, если H – конечно порожденная группа, то α_H есть величина обратная к наименьшему положительному полюсу функции $H(x)$, который может быть найден как корень алгебраического уравнения

$$\det\left\| \delta_{i,\varepsilon}^{j,\mu}-x^{\partial(W_i^{\varepsilon})-\beta(W_j^{\mu},W_i^{\varepsilon})}\right\|=0 \qquad (2.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\{W_K^{\varepsilon}\}$ – нильсеновская система образующих группы H. Тогда показатель роста группы H не меньше величины, обратной к наименьшему положительному корню уравнения

$$1-\sum_{K=1}^{\infty}\sum_{\varepsilon=\pm1}x^{\partial(W_K^{\varepsilon})}=0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$H(x)=1+\sum_{k,\varepsilon} x^{\partial(W_k^\varepsilon)}+\sum_{k,\varepsilon}\sum_{m,\mu} x^{\partial(W_k^\varepsilon)-\beta(W_m^\mu,\,W_k^\varepsilon)} H^{m,\mu}(x)=$$

$$=1+\sum_{k,\varepsilon} x^{\partial(W_k^\varepsilon)}+\sum_{k,\varepsilon}\sum_{m,\mu} x^{\partial(W_k^\varepsilon)+\partial(W_m^\mu)-\beta(W_m^\mu,\,W_k^\varepsilon)}+$$

$$+\sum_{k,\varepsilon}\sum_{m,\mu}\sum_{l,\nu} x^{\partial(W_k^\varepsilon)+\partial(W_m^\mu)-\beta(W_m^\mu,\,W_k^\varepsilon)-\beta(W_l^\nu,\,W_m^\mu)} H^{l,\nu}(x)=\dots$$

Заметим, что в силу равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}|H_k|\Big)x^n=\frac{1}{1-x}H(x)$$

радиусы сходимости рядов $H(x)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}|H_k|\Big)x^n$ совпадают.

Но радиус сходимости последнего ряда не больше радиуса сходимости ряда

$$1+\sum_{k,\varepsilon} x^{\partial(W_k^\varepsilon)}+\sum_{k,\varepsilon}\sum_{m,\mu} x^{\partial(W_k^\varepsilon)+\partial(W_m^\mu)}+$$

$$+\sum_{k,\varepsilon}\sum_{m,\mu}\sum_{l,\nu} x^{\partial(W_k^\varepsilon)+\partial(W_m^\mu)+\partial(W_l^\nu)}=\dots=\frac{1}{1-\sum_{k,\varepsilon} x^{\partial(W_k^\varepsilon)}}$$

Предложение доказано.

ПРИМЕР. Воспользуемся предложением 2.2 для того, чтобы оценить показатель роста коммутатора группы F_2, т.е. подгруппы H в F_2, порожденной элементами $X_1X_2X_1^{-1}X_2^{-1}$, где X_1, X_2 пробегают все элементы группы F_2. Группа H свободно порождается элементами

$$W_{\nu,\mu} = a^{\nu} b^{\mu} a^{-\nu} b^{-\mu}$$

где ν и μ - целые числа, не равные нулю. Нетрудно проверить, что старшее начало и старший конец произвольного W- слова являются изолированными. Так как

$$\partial(W_{\nu,\mu}) = 2(\nu+\mu)$$

то

$$1 - \sum_{\nu,\mu} x^{\partial(W_{\nu,\mu})} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{2n} = 1 - \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

Следовательно показатель роста группы F_m не меньше величин обратной к наименьшему положительному корню уравнения

$$1 - \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

После несложных вычислений находим, что

$$\alpha_H \geqslant \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} > 2$$

§ 3. Основная формула

В этом параграфе мы установим формулу, выражающую спектральный радиус простого блуждания на однородном пространстве S группы F_m и показатель роста стационарной группы H_ξ точки $\xi \in S$ (Заметим, что α_{H_ξ} не зависит от выбора точки ξ).

Пусть группа F_m транзитивно действует на счетном множестве S. Множество S можно отождествить с множеством правых классов смежности группы F_m по стационарной подгруппе H_ξ точки ξ. Запись

$$S \simeq F_m/H$$

в дальнейшем и будет означать, что множество S состоит из правых классов смежности группы F_m по подгруппе H.

ЛЕММА 3.1. Пусть r – спектральный радиус простого блуждания на однородном пространстве $S \simeq F_m/H$. Тогда

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \max \left[m_{0K}^{(n)}(p) \left(\frac{\alpha_H}{2m-1} \right)^K \right] \right\}^{\frac{1}{n}}$$

где $p = (2m-1)/2m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_{H,H}^{(n)}$ – вероятность возвращения в точку H пространства F_m/H на n – ом шаге. Тогда

$$P_{H,H}^{n} = m_{0,0}^{(n)}(p) + \sum_{K=1}^{n} m_{0K}^{(n)}(p) \frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}}$$

Следовательно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ P_{H,H}^{(n)} \right\}^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ m_{0,0}^{(n)}(p) + \sum_{K=1}^{n} m_{0K}^{(n)}(p) \frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}} \right\}^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} (\mu_n)^{\frac{1}{n}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{m_{00}^{(n)}(p)}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \sum_{K=1}^{n} m_{0,K}^{(n)}(p) \frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

где

$$\mu_n = \max \left\{ m_{00}^{(n)}(p), \max_{1\le K\le n} m_{0,K}^{(n)}(p) \frac{\alpha_H^{K+2}}{2m(2m-1)^{K-1}} \right\}$$

Но выражение

$$\left\{ \frac{m_{0,0}^{(n)}(p)}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n} \sum_{K=1}^{n} m_{0,K}^{(n)}(p) \frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ограничено сверху величиной $(n+1)^{\frac{1}{n}}$, а снизу константой 1, если $\mu_n = m_{0,0}^{(n)}(p)$ и величиной

$$|H_{\xi(n)}| \, \alpha_H^{-(\xi(n)+2)}$$

в противном случае ($\xi(n)$ - значение k , при котором достигается максимум).

Так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[|H_{\xi(n)}|\,\alpha_H^{-(\xi(n)+2)}\right]^{\frac{1}{n}}=1$$

то

$$\gamma=\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\mu_n\}^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\max_{0\le k\le n} m^{(n)}_{0,k}(p)\left(\frac{\alpha_H}{2m-1}\right)^k\right]^{\frac{1}{n}}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть γ - спектральный радиус простого блуждания на однородном пространстве $S=F_m/H$.

Тогда

$$\gamma=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2m-1}}{2m}\left(\dfrac{\alpha_H}{\sqrt{2m-1}}+\dfrac{\sqrt{2m-1}}{\alpha_H}\right) & \text{если}\quad \alpha_H>\sqrt{2m-1} \quad (3.\mathrm{I})\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2m-1}}{m} & \text{если}\quad 1\le\alpha_H<\sqrt{2m-1} \quad (3.2)\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 3.I следует из результата предыдущей леммы и формул (4.I), (4.2) главы I, если положить

$$p=\frac{2m-1}{2m},\qquad q=\frac{1}{2m},\qquad \theta=\frac{\alpha_H}{2m-1}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Действие свободной группы F_m на однородном пространстве F_m/H аменабельно тогда и только тогда, когда $\alpha_H=2m-1$.

Для доказательства воспользуемся критерием Кестена: транзитивное действие счетной группы G на множестве S аменабельно

бельно тогда и только тогда, когда спектральный радиус симметрического случайного блуждания на множестве S равен I.

Заметим, что доказательство критерия Кестена аменабельности группы переносится на случай групповых действий без изменений и мы его опускаем.

Из формул (3.I),(3.2) следует, что $\tau = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_H = 2m-1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Группа $G \simeq F_m/H$ является аменабельной тогда и только тогда, когда $\alpha_H = 2m-1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если $\alpha_H = 2m-1$ для множества $\{a_i\}$ свободных образующих группы F_m, то $\alpha_H = 2m-1$ для произвольного другого множества свободных образующих группы F_m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо воспользоваться тем, что если спектральный радиус простого блуждания на группе G, построенного по образующим элементам $a_1, \ldots, a_m$ равен I, то он равен I и для произвольного другого набора образующих элементов группы G.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Если H – нетривиальный нормальный делитель группы F_m, то $\alpha_H > \sqrt{2m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [3] Кестеном доказана следующая теорема. Пусть группа G порождается набором $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и мера p определена на A следующим образом: $p(a_i) = 1/2m$. Тогда группа G является свободной группой порожденной элементами $a_1, \ldots, a_m$ тогда и только тогда, когда

$$\tau_p = \frac{\sqrt{2m-1}}{m}$$

Так как свободная группа F_m является хопфовой, т.е. не изоморфна никакой истинной фактор группе, то вместе с формулой (3.I) это и означает, что показатель роста нормальной подгруппы группы F_m больше, чем $\sqrt{2m-1}$ ч.т.д.

В следующей главе будет доказано, что у группы F_m существуют нормальные подгруппы, показатели роста которых как угодно мало отличаются от $\sqrt{2m-1}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Простое случайное блуждание на однородном пространстве F_m/H возвратно тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|H_n|}{(2m-1)^n} \qquad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случайное блуждание возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}_{\xi,\xi} = \infty$$

где $P^{(n)}_{\xi,\xi}$ - вероятность возвращения в точку ξ на n -ом шаге. Но

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{n}_{H,H} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[m^{(n)}_{0,0}(p) + \sum_{k=1}^{n} m^{(n)}_{0,k}(p)\frac{|H_k|}{2m(2m-1)^{k-1}}\right]$$

В силу леммы 4.3 главы I этот ряд расходится тогда и только тогда, когда расходится ряд (3.3). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{n}_{H,H} x^n$$

производящая функция вероятностей возвращения в точку $H \in \mathcal{S}$ при простом блуждании на $\mathcal{S} \simeq F_m/H$,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |H_n| x^n$$

- производящая функция группы H. Тогда

$$u(x) = R\left(x, \sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}\right) H\left(\frac{m\left[1-\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}\right]}{(2m-1)x}\right)$$

где

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}}\left[\frac{2m-1}{2m} - 2(m-1)\frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}\right)^2}{\left(\frac{2m-1}{m}\right)^2 x^2 - \left(1-\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}\right)^2}\right]$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$P^{(n)}_{H,H} = m^{(n)}_{0,0}(p) + \sum_{K=1}^{n} m^{(n)}_{0,K}(p)\,\frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}}$$

где $p=(2m-1)/2m$, то

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}_{H,H} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n m^{(n)}_{0,0}(p) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{K=1}^{n} m^{(n)}_{0,K}(p)\frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}}\right)x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} m^{(n)}_{0,0}(p)x^n + \sum_{K=1}^{\infty}\frac{|H_K|}{2m(2m-1)^{K-1}}\sum_{n=K}^{\infty} m^{(n)}_{0,K}(p)x^n$$

Докажем, что при $p,q \geqslant 0,\ p+q=1,\ p>q,$ $K \geqslant 0$

$$\phi_K(x) = \sum_{n=K}^{\infty}(x\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^K\binom{n}{\frac{n-K}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K \tag{3.4}$$

С этой целью, заметим во-первых, что величина

$$(\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^K\binom{n}{\frac{n-K}{2}} = p^{\frac{n+K}{2}} q^{\frac{n-K}{2}}\binom{n}{\frac{n-K}{2}}$$

совпадает с вероятностью перехода за n шагов из состояния 0 в состояние K при бернуллиевском случайном блуждании на множестве целых чисел, для которого $p(0,1)=p$, $p(0,-1)=q$.

Тогда

$$\phi_K(x) - \delta_0^K = px\,\phi_{K-1}(x) + qx\,\phi_{K+1}(x) \tag{3.5}$$

Уравнение /3.5/ нетрудно решить. Соответствующее однородное разностное уравнение

$$f_K(x) = px f_{K-1}(x) + qx f_{K+1}(x)$$

имеет решение

$$f_K(x) = A(x)\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K + B(x)\left(\frac{1+\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K$$

где

$$\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}, \qquad \frac{1+\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}$$

являются корнями квадратного уравнения $qxt^2 - t + px = 0$.

Следовательно

$$\phi_K(x) = \varphi_K(x) + A(x)\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K + B(x)\left(\frac{1+\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K$$

где $\varphi_K(x)$ - частное решение неоднородного уравнения /3.5/ такое, что $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$. Заметим [1] , что

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \qquad /3.6/$$

Так как $\phi_K(x) \le \phi_0(x)$ при $x \in [0,1]$, то из /3.6/ следует, что $B(x) = 0$ при $x \in [0,1]$. Для вычисления функции $A(x)$ опять таки воспользуемся равенством /3.6/, откуда получим

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

а, следовательно, и /3.4/. Далее имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{0,0}^{(n)}(p)x^n = \cancel{R}\sum_{n=0}^{\infty}(x\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n}{2}} - \frac{p-q}{q}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^t\sum_{n=2t}^{\infty}(x\sqrt{pq})^n\binom{n}{\frac{n-2t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\left[\cancel{R}\,1 - \frac{p-q}{q}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{2t}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^{2t}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\left[\cancel{R}\,1 - \frac{p-q}{q}\,\frac{(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}{(2px)^2-(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}\right] = p\frac{1}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{p} - \frac{p-q}{pq}\right]$$

а при $K>0$

$$\sum_{n=K}^{\infty} m_{0,K}^{(n)}x^n = \frac{1}{p}\sum_{n=K}^{\infty}(x\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^K\binom{n}{\frac{n-K}{2}} -$$

$$- \frac{p-q}{pq}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^t\sum_{n=K+2t}^{\infty}(x\sqrt{pq})^n\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^K\binom{n}{\frac{n-K-2t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\left[\cancel{1}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K - \frac{p-q}{pq}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K\frac{(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}{(2px)^2-(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2qx}\right)^K\left[\frac{1}{p} - \frac{p-q}{pq}\,\frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{(2px)^2-(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}\right]$$

Следовательно $\frac{1}{p}$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\left[1 - \frac{p-q}{pq}\,\frac{(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}{(2px)^2-(1-\sqrt{1-4pqx^2})^2}\right]\left[p - \cancel{\frac{2m-1}{2m}} + \frac{2m-1}{2m}H\left(\frac{m[1-\sqrt{1-\frac{2m-1}{m^2}x^2}]}{(2m-1)x}\right)\right]$$

Осталось в последнее выражение подставить значения $\frac{2m-1}{2m}\tilde{H}(\ \ )$

$$p = (2m-1)/2m, \quad q = 1/2m$$

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Если группа G конечна, то производящая функция

$$\mathcal{U}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{e,e}^{(n)}x^{n}$$

является рациональной функцией от x и $\sqrt{1-bx^2}$, где $P_{e,e}^{(n)}$ – вероятность возвращения в единицу e группы G на n –ом шаге при простом блуждании, построенном по образующим элементам $a_1,\dots,a_m$ группы G а $b=(2m-1)/m^2$.

§ 4. Спектральный радиус симметрического случайного блуждания на группе F_2

Обозначим через r_μ спектральный радиус симметрического случайного блуждания на группе F_2 с распределением μ на множестве образующих элементов a,a^{-1},b,b^{-1} группы F_2, $\mu(a)=\mu(a^{-1})=p$, $\mu(b)=\mu(b^{-1})=q$. Пусть $f_a^{(n)},f_{a^{-1}}^{(n)},f_b^{(n)},f_{b^{-1}}^{(n)}$ вероятности первого попадания на n – ом шаге в элементы a,a^{-1},b,b^{-1} соответственно, при условии, что в начальный момент времени мы находились в единице e группы F_2. Из соотношений (I.I) следует, что производящие функции

$$u_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_a^{(n)}z^n,\ u_{a^{-1}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{a^{-1}}^{(n)}z^n,\ u_b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_b^{(n)}z^n,\ u_{b^{-1}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{b^{-1}}^{(n)}z^n$$

удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} u_a(z)=pz+pz\,u_a^2(z)+qz\,u_a(z)u_b(z)+qz\,u_a(z)u_{b^{-1}}(z)\\ u_{a^{-1}}(z)=pz+pz\,u_{a^{-1}}^2(z)+qz\,u_{a^{-1}}(z)u_b(z)+qz\,u_{a^{-1}}(z)u_{b^{-1}}(z)\\ u_b(z)=qz+qz\,u_b^2(z)+pz\,u_b(z)u_a(z)+pz\,u_b(z)u_{a^{-1}}(z)\\ u_{b^{-1}}(z)=qz+qz\,u_{b^{-1}}^2(z)+pz\,u_{b^{-1}}(z)u_a(z)+pz\,u_{b^{-1}}(z)u_{a^{-1}}(z)\end{cases}\qquad(4.I)$$

В силу симметричности меры μ имеем

$$u_a(z)=u_{a^{-1}}(z)=u_1(z),\quad u_b(z)=u_{b^{-1}}(z)=u_2(z)$$

и следовательно, функции $u_1(z)$, $u_2(z)$ могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} u_1(z) = pz + pz\,u_1^2(z) + 2qz\,u_1(z)u_2(z) \\ u_2(z) = qz + qz\,u_2^2(z) + 2pz\,u_1(z)u_2(z) \end{cases} \tag{4.2}$$

Производящая функция $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} z^n$ (f^n - вероятность возвращения в единицу e группы F_2 впервые на n - ом шаге) и функции $u_a(z), u_{a^{-1}}(z), u_b(z), u_{b^{-1}}(z)$ связаны соотношением

$$u(z) = 1 + u_a(z) + u_{a^{-1}}(z) + u_b(z) + u_{b^{-1}}(z)$$

Следовательно, спектральный радиус r_μ есть величина, обратная к радиусу сходимости рядов $u_1(z), u_2(z)$ являющихся решениями системы (4.2).

Рассмотрим отображение $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_\lambda(u_1,u_2) = (\phi_1(u_1,u_2), \phi_2(u_1,u_2))$, где

$$\phi_1(u_1,u_2) = u_1 - p\lambda - p\lambda u_1^2 - 2q\lambda\, u_1 u_2$$

$$\phi_2(u_1,u_2) = u_2 - q\lambda - q\lambda u_2^2 - 2p\lambda\, u_1 u_2$$

Так как решения $u_1(z)$, $u_2(z)$ системы (4.2) представляют собой ряды с положительными коэффициентами, то $r_\mu = 1/\lambda$, где $(\lambda, u_1(\lambda), u_2(\lambda))$ одно из положительных решений системы

$$\begin{cases} \phi_1(u_1,u_2) = 0 \\ \phi_2(u_1,u_2) = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(u_1,u_2)} = 0 \tag{4.3}$$

ЛЕММА 5.I. Система (4.3) имеет единственное положительное решение $(\lambda, u_1(\lambda), u_2(\lambda))$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\lambda > 0$. Тогда уравнение

$$\frac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(u_1,u_2)} = \begin{vmatrix} 1 - 2p\lambda u_1 - 2q\lambda u_2 & -2q\lambda u_1 \\ -2p\lambda u_2 & 1 - 2p\lambda u_1 - 2q\lambda u_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1-4p\lambda u_1-4q\lambda u_2+4p^2\lambda^2u_1^2+4q^2\lambda^2u_2^2+4pq\lambda^2u_1u_2=0$$

определяет в плоскости переменных u_1, u_2 эллипс K, имеющий две точки касания $(0,\frac{1}{2q\lambda}), (\frac{1}{2p\lambda}, 0)$ с осями координат

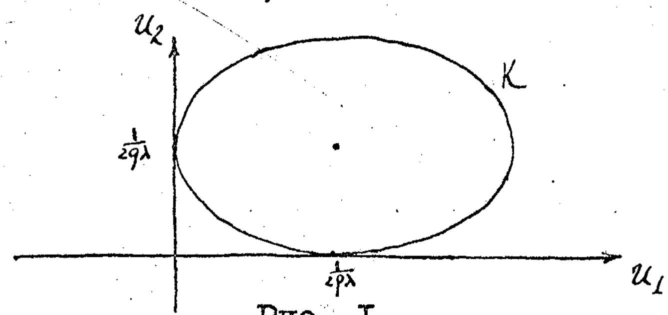

Рис. I

Множество точек положительного октанта R^2_+, для которых $\phi_1(u_1,u_2)-p\lambda<0$ ограничено прямой $u_1p\lambda+2q\lambda u_2=1$, а множество точек из R^2_+, для которых $\phi_2(u_1,u_2)-q\lambda<0$ ограничено прямой $2p\lambda u_1+q\lambda u_2=1$.

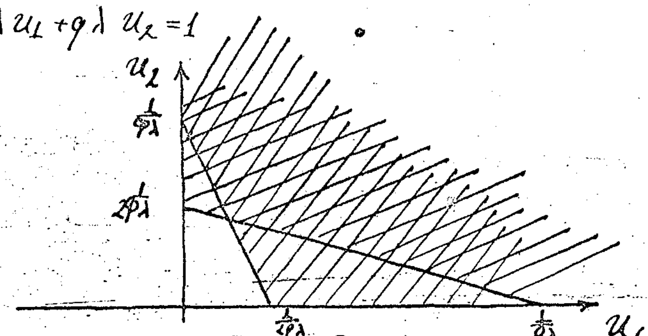

Рис. 2

Заметим, что при отображении φ_λ четыре точки $a_1=(0,0)$, $a_2=(\frac{1}{p\lambda},0)$, $a_3=(0,\frac{1}{q\lambda})$ и $a_4=(\frac{1}{3p\lambda},\frac{1}{3q\lambda})$ переходят в точку $(-p\lambda,-q\lambda)$. Следовательно $\varphi(R^2_+)$ состоит из двух частей: множества $P=\{u_1\le -p\lambda, u_2\le -q\lambda\}$ и множества Q ограниченного образами α,β отрезков $[a_2,a_4], [a_3,a_4]$, образом γ части эллипса K, отсекаемой точками a_2,a_3, а также отрезками прямых $u_1=-p\lambda$, $u_2=-q\lambda$

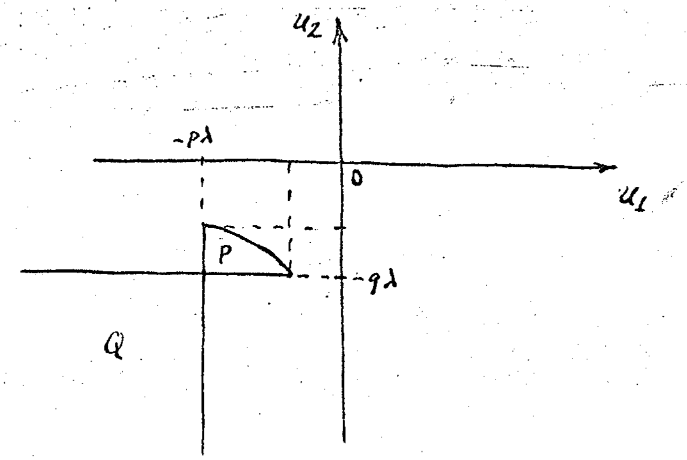

Рис. 3

Найдем уравнение кривой γ в системе координат с центром в точке $-p\lambda, -q\lambda$.

Имеем

$$\phi_1(u_1, \xi u_1) = u_1 - p\lambda - p\lambda u_1^2 - 2q\lambda\xi u_1^2$$

$$\phi_2(u_1, \xi u_1) = \xi u_1 - q\lambda - q\lambda \xi^2 u_1^2 - 2p\lambda u_1^2$$

Пусть точка $(u, \xi u)$ принадлежит эллипсу K. Тогда

$$1 - 4\lambda(p+q\xi)u + 4\lambda^2(p^2+pq\xi+q^2\xi^2)u^2 = 0$$

$$u^{1,2} = \frac{4\lambda(p+q\xi) \pm \sqrt{16\lambda^2(p+q\xi)^2 - 16\lambda^2(p^2+pq\xi+q^2\xi^2)}}{8\lambda^2(p^2+pq\xi+q^2\xi)} =$$

$$= \frac{4\lambda(p+q\xi) \pm 4\lambda\sqrt{pq}}{8\lambda^2(p^2+pq\xi+q^2\xi^2)} = \frac{p+q\xi \pm \sqrt{pq\xi}}{2(p^2+pq\xi+q^2\xi^2)}\,\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2(p+q\xi \mp \sqrt{pq\xi})}\,\frac{1}{\lambda}$$

Рассмотрим образы точек $(u^1, \xi u^1), (u^2, \xi u^2)$. Заметим, что точка $(\phi_1(u^1, \xi u^1), \phi_2(u^1, \xi u^1))$ лежит вне области $\phi_1 \geq -p\lambda$, $\phi_2 \geq -q\lambda$, а точка $(\phi_1(u^2, \xi u^2), \phi_2(u^2, \xi u^2))$ принадлежит кривой γ ибо

$$\phi_1(u^2,\xi u^2) = -\lambda p + \frac{1}{2(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})} - \frac{\lambda(p+2q\xi)}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2\lambda^2} =$$

$$= -\lambda p + \frac{2\sqrt{pq\xi}+p}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2}\,\frac{1}{\lambda}$$

$$\phi_2(u^2,\xi u^2) = -\lambda q + \frac{\xi}{2(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})} - \lambda(2p\xi+q\xi^2)\frac{1}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2\lambda^2} =$$

$$= -\lambda q + \frac{2\xi\sqrt{pq\xi}+q\xi^2}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2}\,\frac{1}{\lambda}$$

Следовательно, γ есть кривая, которая в системе координат $\phi_1 O' \phi_2$ с центром O' в точке $(-p\lambda, -q\lambda)$ задается параметрически уравнениями

$$\phi_1 = \frac{2\sqrt{pq\xi}+p}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})}\,\frac{1}{\lambda}$$

$$\phi_2 = \frac{2\xi\sqrt{pq\xi}+q\xi^2}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2}\,\frac{1}{\lambda}$$

Утверждение леммы эквивалентно утверждению о том, что существует единственное положительное λ такое, что точка $p\lambda, q\lambda$ принадлежит дуге γ. Для доказательства последнего утверждения произведем преобразование

$$\phi_1' = \lambda\phi_1, \quad \phi_2' = \lambda\phi_2$$

после которого доказательство леммы сводится к доказательству того, что кривая $\gamma' = (\phi_1'(\xi), \phi_2'(\xi))$, где $\xi \in [0,\infty]$ и прямая $\phi_1' = q/p\,\phi_2'$ имеют одну точку пересечения.

Так как

$$\frac{\partial\phi_1'(\xi)}{d\xi} = \frac{(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})\left[\frac{\sqrt{pq}}{\xi}(p+q\xi+\sqrt{pq\xi}) - 2(2\sqrt{pq\xi}+p)\left(q+\frac{\sqrt{pq}}{2\sqrt{\xi}}\right)\right]}{4(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2} =$$

$$= -\frac{3}{4}\,\frac{q\sqrt{pq\xi}+pq}{p+q\xi+\sqrt{pq\xi}} < 0$$

$$\frac{d\phi_2}{d\xi} = \frac{(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})\left[\left(2\sqrt{pq\xi}+\sqrt{pq}\,\xi+2q\xi\right)\left(p+q\xi+\sqrt{pq\xi}\right)-2\left(2\xi\sqrt{pq\xi}+q\xi^2\right)\left(q+\frac{\sqrt{pq}}{2\sqrt{\xi}}\right)\right]}{(p+q\xi+\sqrt{pq\xi})^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{p\sqrt{pq\xi}+pq\xi}{p+q\xi+\sqrt{pq\xi}} > 0$$

то, действительно, кривая γ имеет единственную точку пересечения с прямой $\phi_1' = q/p\ \phi_2'$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть $\omega = \frac{q}{p}$. Тогда

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{\sqrt{-2\omega(\omega+1)}\,\nu}{\nu^2+\frac{3}{4}\omega^2} \qquad (4.4)$$

где ν - единственное отрицательное решение уравнения

$$\nu^4 - \frac{3}{2}\omega^2\nu^2 + \omega(2-\omega^2)\nu - \frac{3}{16}\omega^4 = 0 \qquad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство нулю якобиана отображения φ в точке u_1, u_2 эквивалентно существованию такого μ, что

$$\begin{cases} 2p\lambda u_1 + 2q\lambda u_2 - 1 = \mu\, 2p\lambda u_2 \\ 2p\lambda u_1 + 2q\lambda u_2 - 1 = \frac{1}{\mu}\, 2q\lambda u_1 \end{cases}$$

Решая эту систему находим

$$u_1 = \frac{p\mu^2}{2\lambda(p^2\mu^2 - pq\mu + q^2)}$$

$$u_2 = \frac{q}{2\lambda(p^2\mu^2 - pq\mu + q^2)}$$

Подставим найденные значения в систему (4.2) при $z = \lambda$.
Получим

$$\frac{p\mu^2}{2\lambda(p^2\mu^2-pq\mu+q^2)} = p\lambda + p\lambda\,\frac{p^2\mu^4}{4\lambda^2(p^2\mu^4-pq\mu+q^2)^2} + 2q\lambda\,\frac{pq\mu^2}{4\lambda^2(p^2\mu^2-pq\mu+q^2)^2}$$

$$\frac{q}{2\lambda(p^2\mu^2-pq\mu+q^2)} = q\lambda + q\lambda\,\frac{q^2}{4\lambda^2(p^2\mu^2-pq\mu+q^2)} + 2p\lambda\,\frac{pq\mu^2}{4\lambda^2(p^2\mu^2-pq\mu+q^2)^2}$$

Выражая λ^2 из первого и второго уравнений, находим

$$\lambda^2 = \frac{p\mu^3(p\mu-2q)}{4(q^2-pq\mu+p^2\mu^2)^2} = \frac{q(q-2p\mu)}{4(\mu^2p^2-pq\mu+q^2)}$$

откуда следует, что μ должно не превосходить $q/2p$ и удовлетворять уравнению

$$p^2\mu^4-2pq\mu^3+2pq\mu-q^2=0$$

или

$$\mu^4-2\omega\mu^3+2\omega\mu-\omega^2=0$$

Сделаем замену переменной $\nu=\mu-\frac{\omega}{2}$.Тогда

$$\lambda^2 = -\frac{2\omega(\omega+1)^2\nu^4}{[\nu^2+\frac{3}{4}\omega^2]^2} \tag{4.6}$$

где ν – единственное отрицательное решение уравнения

$$\nu^4-\frac{3}{2}\omega^2\nu^2+\omega(2-\omega^2)\nu-\frac{3}{16}\omega^4=0$$

Единственность отрицательного решения этого уравнения следует из следующих соображений. При $\omega=1$ уравнение (4.6) имеет простой корень $-3/2$ и корень $1/2$ кратности 3. Если ω непрерывно изменяется от I до $+\infty$ и от I до 0, то нетрудно видеть, что в правой полуплоскости у уравнения (5.4) всегда имеется три корня, а в левой один отрицательный корень. Так как система (4.3) имеет единственное положительное решение, а $\tau_\mu = 1/\lambda$, то теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Спектральный радиус τ_μ есть аналитическая функция параметра ρ .

§ 5. Спектральный радиус симметрического случайного блуждания на группе $G_{l,k}=\langle a,b \mid a^l=b^k=e\rangle$.

Пусть μ – симметрическая мера, сосредоточенная на элементах a, a^{-1}, b, b^{-1} группы $G_{l,k}$, $\mu(a)=\mu(a^{-1})=p$, $\mu(b)=\mu(b^{-1})=q$. Обозначим через $r_\mu^{l,k}$ спектральный радиус симметрического случайного блуждания на группе $G_{l,k}$, определенного с помощью меры μ.

Если $l=k=2$, то группа $G_{l,k}$ является аменабельной и $r_\mu^{2,2}=1$.

Предположим теперь, что l и k одновременно не равны 2. В этом случае группа $G_{l,k}$ не является аменабельной. Следовательно $r_\mu^{l,k}<1$, если $p>0, q>0$ и $r_\mu^{l,k}$ может быть найдено как величина, обратная к радиусу сходимости ряда

$$u_{l,k}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} u_{l,k}^{(n)} z^n$$

где $u_{l,k}^{(n)}$ – вероятность возвращения в единицу e группы $G_{l,k}$ на n – ом шаге. В силу невозвратности симметрического случайного блуждания на неаменабельной группе $u_{l,k}(1)<\infty$. Следовательно, $r_\mu^{l,k}$ также можно найти как величину обратную к радиусу сходимости ряда

$$v_{l,k}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} v_{l,k}^{(n)} z^n$$

где $v_{l,k}^{(n)}$ – вероятность первого возвращения в единицу e группы $G_{l,k}$ на n – ом шаге, так как ряды $u_{l,k}(z), v_{l,k}(z)$ связаны соотношением

$$u_{l,k}(z)=\frac{1}{1-v_{l,k}(z)}$$

Будем говорить, что случайный элемент X находится в состоянии Wa^i, если $X = Wa^{i\varepsilon}$, ε равно $+1$ или -1, слово W приведено (т.е. отвечающий этому слову элемент не может быть представлен более коротким словом), и при этом W не оканчивается символом a^μ, $\mu = \pm 1$.

Аналогичным образом определяются состояния Vb^j,

$$i = 1, \dots, [\tfrac{\ell}{2}], \qquad j = 1, \dots, [\tfrac{k}{2}].$$

Обозначим через $f^i_{n,a}$ вероятность первого попадания за шагов из состояния Wa^i в состояние Wa^{i-1}, $i = 1, \dots, [\frac{\ell}{2}]$.

Аналогичным образом определим вероятности $f^j_{n,b}$, $j = 1, \dots, [\frac{k}{2}]$. Очевидно, что $f^i_{n,a}$, $f^j_{n,b}$ не зависят от слова W.

ЛЕММА 5.1. Вероятности $f^i_{n,a}$, $f^j_{n,b}$ удовлетворяют системе соотношений

$$f^i_{1,a} = 2p, \quad f^i_{1,b} = 2q.$$

$$f^i_{n,a} = p\sum_{t=0}^{n-1} f^{i+1}_{t,a} f^i_{n-1-t,a} + 2q\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t,b} f^i_{n-1-t,a}, \qquad i = 1, \dots, [\tfrac{\ell}{2}]$$

$$f^{[\frac{\ell}{2}]}_{n,a} = 2q\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t,b} f^{[\frac{\ell}{2}]}_{n-1-t,a} \quad \text{если } \ell \text{ четно}$$

$$f^{[\frac{\ell}{2}]}_{n,a} = p f^{[\frac{\ell}{2}]}_{n-1,a} + 2q\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t,b} f^{[\frac{\ell}{2}]}_{n-1-t,a} \quad \text{если } \ell \text{ нечетно}$$

$$f^i_{n,b} = 2p\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t,a} f^i_{n-1-t,b} + q\sum_{t=0}^{n-1} f^{i+1}_{t,b} f^i_{n-1-t,b}$$

$$f^{[\frac{k}{2}]}_{n,b} = 2p\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t,a} f^{[\frac{k}{2}]}_{n-1-t,b} \quad \text{если } k \text{ четно}$$

$$f^{[\frac{k}{2}]}_{n,b} = q f^{[\frac{k}{2}]}_{n-1,b} + 2p\sum_{t=0}^{n-1} f^1_{t,a} f^{[\frac{k}{2}]}_{n-1-t,b} \quad \text{если } k \text{ нечетно}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случайная частица, находящаяся в состоянии Wa^i в первый момент времени может перейти в одно из состояний Wa^{i+1}, Wa^{i-1}, $i=1,\dots,[\frac{l}{2}]$ с вероятностью p, а в состояние $(Wa^i)b$ с вероятностью $2q$. Если частица перешла в состояние Wa^{i+1}, то прежде чем за $n-1$ шаг впервые перейти в состояние Wa^{i-1}, она обязательно должна побывать в состоянии Wa^i. Вероятность этого события равна

$$\sum_{t=0}^{n-1} f_{t,a}^{i+1} f_{n-1-t,a}^{i}$$

Если в первый момент времени частица перешла в состояние $(Wa^i)b$, то вероятность того, что из этого состояния за $n-1$ шаг частица перейдет впервые в состояние Wa^{i-1} равна

$$\sum_{t=0}^{n-1} f_{t,a}^{1} f_{n-1-t,b}^{1}$$

Следовательно, если $i<[\frac{l}{2}]$, то

$$f_{n,a}^{i} = p\sum_{t=0}^{n-1} f_{t,a}^{i+1} f_{n-1-t,a}^{i} + 2q\sum_{t=0}^{n-1} f_{t,b}^{1} f_{n-1-t,a}^{i}$$

Остальные соотношения устанавливаются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. Производящие функции

$$u_a^i(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,a}^{i} z^n, \quad u_b^j(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,b}^{j} z^n$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} u_a^i(z) = pz + pz\,u_a^i(z)\,u_a^{i+1}(z) + 2qz\,u_b^1(z)\,u_a^i(z) \\ i=1,\dots,[\frac{l}{2}] \\ u_b^j(z) = qz + qz\,u_b^j(z)\,u_b^{j+1}(z) + 2pz\,u_a^1(z)\,u_b^j(z) \\ j=1,\dots,[\frac{k}{2}] \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
u_a^{[\frac{l}{2}]}(z) = 2pz + 2qz\, u_b^1(z) u_a^{[\frac{l}{2}]}(z) & \text{если } l \text{ четно} \\
u_a^{[\frac{l}{2}]}(z) = pz + pz\, u_a^{[\frac{l}{2}]}(z) + 2qz\, u_b^1(z) u_a^{[\frac{l}{2}]}(z) & \text{если } l \text{ нечетно} \\
u_b^{[\frac{k}{2}]}(z) = 2qz + 2qz\, u_a^1(z) u_b^{[\frac{k}{2}]}(z) & \text{если } k \text{ четно} \\
u_b^{[\frac{k}{2}]}(z) = qz + qz\, u_b^{[\frac{k}{2}]}(z) + 2pz\, u_a^1(z) u_b^{[\frac{k}{2}]}(z) & \text{если } k \text{ нечетно}
\end{cases}
\tag{5.I}
$$

Нетрудно видеть, что функция $v_{l,k}(z)$ связана с функциями $u_a^i(z), u_b^j(z)$ соотношением

$$v_{l,k}(z) = 2p\, u_a^1(z) + 2q\, u_b^2(z)$$

Следовательно, спектральный радиус $r_\mu^{l,k}$ есть величина обратная к общему радиусу сходимости рядов $u_a^i(z), u_b^j(z)$.

Вычислим спектральный радиус в некоторых конкретных случаях. Для группы $G_{3,3} = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = e \rangle$ система (5.I) имеет вид

$$
\begin{cases}
u_1(z) = pz + 2qz\, u_1(z) u_2(z) + pz\, u_1(z) \\
u_2(z) = qz + 2pz\, u_1(z) u_2(z) + qz\, u_2(z)
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.I.

$$r_\mu^{3,3} = \frac{2(1-2pq)}{\sqrt{9-16pq}-1} \tag{5.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем положительное z и пусть

$$\phi_1(u_1, u_2) = (1-pz)u_1 - pz - 2qz\, u_1$$

$$\phi_2(u_1, u_2) = (1-qz)u_2 - qz - 2pz\, u_1$$

Равенство нулю якобиана $\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u_1, u_2)}$ эквивалентно существованию такого λ, что

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} = \lambda \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} = \lambda \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}$$

Из этих равенств составляем систему

$$\begin{cases} 2qz u_2 + pz - 1 = \lambda 2pz u_2 \\ 2pz u_1 + qz - 1 = \frac{1}{\lambda} 2qz u_1 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$u_1 = \frac{-\lambda(1-qz)}{2z(q-\lambda p)}$$

$$u_2 = \frac{1-pz}{2z(q-\lambda p)}$$

Подставим полученные значения величин u_1, u_2 в систему (5.2). При этом мы получим

$$\frac{-\lambda(1-pz)(1-qz)}{2z(q-\lambda p)} = pz + 2qz\frac{-\lambda(1-pz)(1-qz)}{4z^2(q-\lambda p)^2}$$

$$\frac{(1-pz)(1-qz)}{2z(q-\lambda p)} = qz + 2pz\frac{-\lambda(1-pz)(1-qz)}{4z^2(q-\lambda p)}$$

или

$$z^2 = \frac{\lambda^2(1-pz)(1-qz)}{2(q-\lambda p)^2} = \frac{(1-pz)(1-qz)}{2(q-\lambda p)^2}$$

Из этих равенств вытекает, что $\lambda = \pm 1$. Рассмотрим два случая

I. $\lambda = -1$. Так как $q + p = 1/2$, то величина z является решением уравнения

$$\frac{z^2}{2} - (1-pz)(1-qz) = 0$$

$$(1-2pq)z^2 + z - 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9-16pq}}{2(1-2pq)}$$

2. $\lambda = 1$. В этом случае z может быть найдено из уравнения

$$2(q-p)^2 z^2 - (1-pz)(1-qz) = 0$$

$$[2(q-p)^2-pq]z^2+\frac{z}{2}-1=0$$

$$z_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+16[2(q-p)^2-pq]}}{4[2(q-p)^2-pq]}$$

Заметим, что при $p=q=1/4$ из системы уравнений (5.2) легко установить, что ближайшей к нулю положительной особой точкой функций $u_1(z), u_2(z)$ есть

$$\xi_0=\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{-1}$$

Следовательно, при $p=q=1/4$

$$\xi_0=\frac{-1+\sqrt{9-16pq}}{2(1-2pq)}$$

Покажем, что при всех $p,q>0,\ p+q=\frac{1}{4}$ имеет место неравенство

$$\frac{-1+\sqrt{1+16[2(q-p)^2-pq]}}{4[2(q-p)^2-pq]}>\frac{-1+\sqrt{9-16pq}}{2(1-2pq)} \qquad (5.4)$$

С этой целью обозначим $2(q-p)^2-pq$ через ξ, $\frac{1}{2}-pq$ — через η. Нам нужно сравнить между собой величины

$$\frac{-1+\sqrt{1+16\xi}}{4\xi}=\frac{4}{1+\sqrt{1+16\xi}}$$

и

$$\frac{-1+\sqrt{1+16\eta}}{4\eta}=\frac{4}{1+\sqrt{1+16\eta}}$$

Так как $4/(1+\sqrt{1+16\eta})$ убывающая по η функция, то для доказательства (5.4) достаточно установить очевидное неравенство

$$2(q-p)^2-pq<\frac{1}{2}-pq$$

которое выполняется при $p,q>0,\ p+q=\frac{1}{2}$.

Так как спектральный радиус $r_{\mu}^{3,3}$ — непрерывная функция параметра p, то из проведенных рассуждений можно заключить, что

$$\tau_\mu^{3,3} = 1/Z_1$$

а стало быть имеет место формула (5.3).

Предложение доказано.

Обратимся теперь к случаю группы $G_{2,\infty} = \langle a, b \mid a^2 = e \rangle$

Система уравнений (5.I) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} u_1(z) = 2pz + 2qz\, u_1(z) u_2(z) \\ u_2(z) = qz + qz\, u_2^2(z) + 2pz\, u_1(z) u_2(z) \end{cases} \tag{5.5}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $p = q = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\tau_\mu^{2,\infty} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\sin 70^\circ}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{5.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как при доказательстве предложения 5.I, будем считать z фиксированным и рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2qz\,u_2 - 1 = \frac{1}{\lambda} 2pz\,u_2 \\ 2qz\,u_2 + 2pz\,u_1 - 1 = \lambda\, 2qz\,u_1 \end{cases}$$

Решим эту систему относительно u_1, u_2:

$$u_1 = \frac{p}{2z(q\lambda - p)^2}$$

$$u_2 = \frac{\lambda}{2z(q\lambda - p)}$$

Подставим найденные значения в систему (5.5)

$$\frac{p}{2z(q\lambda - p)^2} = 2pz + 2qz \frac{\lambda p}{4z^2(q\lambda - p)^3}$$

$$\frac{\lambda}{2z(q\lambda - p)^2} = qz + qz \frac{\lambda^2}{4z^2(q\lambda - p)^2} + 2pz \frac{\lambda p}{4z^2(q\lambda - p)^3}$$

Из этих уравнений находим

$$z^2 = \frac{p}{4(p - \lambda q)^3}$$

$$\gamma_\mu = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\sin 70^\circ}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Покажем, что спектральный радиус простого блуждания на группе зависит от выбора системы образующих элементов.

Пусть $G \simeq F_m$ и $A=\{a_1,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,\dots,b_m\}$ два набора образующих элементов группы F_m. Элементы b_i можно задать словами $W_\mu(a_\nu)$ в символах a_i. Отображение $a_\nu \to W_\nu$ определяет автоморфизм группы G. Переход от образующих a_ν к образующим W_ν называется свободной подстановкой. Имеется следующий очевидный способ построения таких подстановок. Мы можем:

(I) поменять местами a_ν и a_μ, $\nu\neq\mu$

(II) заменить a_ν на a_ν^{-1}

(III) заменить a_ν на $a_\nu a_\mu$

(IV) применить подстановки типов (I),(II),(III) повторно конечное число раз. Известно [17], что с помощью правила (IV) можно получить все свободные подстановки.

Предположим теперь, что в произвольной группе G мы при помощи правила (IV) перешли от множества образующих элементов $A=\{a_1,\dots,a_m\}$ к множеству $B=\{b_1,\dots,b_m\}$

Может ли измениться спектральный радиус простого блуждания на G в результате такой замены?

Пример группы $G_{2,\infty}$ показывает, что ответ на поставленный вопрос положителен. Для того, чтобы это доказать перейдем от множества $\{a,b\}$ образующих группы $G_{2,\infty}$ к множеству $\{b,\ c=ab\}$ Граф $\mathcal{G}$ группы $G_{2,\infty}$, заданной представлением $\langle b,c \mid (cb^{-1})^2=e\rangle$ имеет вид

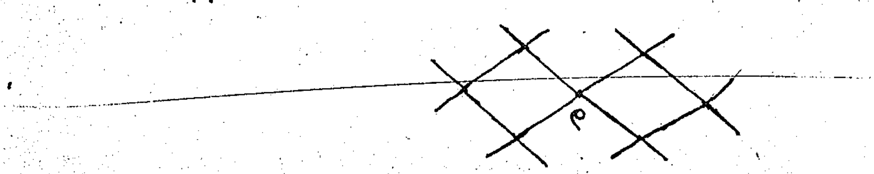

Рис.4

$$z^2 = \frac{\lambda^2(\lambda q - 3p)}{4(q\lambda - p)^3}$$

Следовательно, λ должно удовлетворять уравнению

$$p + \lambda^2(\lambda q - 3p) = 0 \qquad (5.7)$$

В уравнении (5.7) сделаем замену $\lambda = 1/\nu$. Получим уравнение

$$\nu^3 - 3\nu + \frac{q}{p} = 0 \qquad (5.8)$$

Обозначим $K = q/p$, $C = \sqrt[3]{-\frac{K}{2} + \sqrt{-1 + (\frac{K}{2})^2}}$, $D = \sqrt[3]{-\frac{K}{2} - \sqrt{-1 + (\frac{K}{2})^2}}$

Тогда решениями уравнения (5.8) будут числа

$$\nu_1 = C + D$$

$$\nu_{2,3} = -\frac{C+D}{2} \pm i\,\frac{C-D}{2}\sqrt{3}$$

В нашем случае $K = 1$ и

$$\nu_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\frac{2\pi}{9}i} + e^{-\frac{2\pi}{9}i} = 2\cos 40^\circ$$

$$\nu_2 = -\cos 40^\circ + \sin 40^\circ\sqrt{3} = -2\left[\frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ\right] = 2\sin 10^\circ$$

$$\nu_3 = -2\sin 70^\circ$$

Так как из трех величин

$$\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2\cos 40^\circ}\right)^3}, \quad \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2\sin 10^\circ}\right)^3}, \quad \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2\sin 70^\circ}\right)^3}$$

первая больше $4/3$, вторая отрицательна, а

$$\tau_\mu = \frac{2\left(p - \frac{q}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

где ν принимает одно из значений ν_1, ν_2, ν_3, то

Простое блуждание на группе $\langle b, c \mid (cb^{-1})^2 = e \rangle$ совпадает с марковской цепью X на множестве вершин графа $\mathcal{Y}$, в которой из любой вершины переходы возможны только в соседние вершины, причем с равными вероятностями. Но граф $\mathcal{Y}$ совпадает с графом группы $G_{4,4} = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = e \rangle$. Следовательно, спектральный радиус r простого блуждания на группе $\langle b, c \mid (cb^{-1})^2 = e \rangle$ совпадает со спектральным радиусом простого блуждания на группе $G_{4,4}$. Вычислим r.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Спектральный радиус простого блуждания на группе $G_{4,4} = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = e \rangle$ равен $\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (5.I) в этом частном случае, в силу того, что $p = q = \frac{1}{4}$ легко приводится к системе

$$\begin{cases} u_1(z) = \frac{z}{4}\left[1 + u_1(z) u_2(z) + 2u_1^2(z)\right] \\ u_2(z) = \frac{z}{2}\left[1 + u_1(z) u_2(z)\right] \end{cases} \tag{5.9}$$

Радиус сходимости λ рядов $u_1(z), u_2(z)$ находим методом, примененном нами при выводе формул (5.3) и (5.6).

Существует такое μ, что

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{4} u_2 + \lambda u_1 - 1 = \mu \frac{\lambda}{2} u_2 \\ \frac{\lambda}{2} u_1 - 1 = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{4} u_1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$u_1 = \frac{2\mu}{\lambda(\mu - \frac{1}{2})}$$

$$u_2 = 2\frac{\mu + \frac{1}{2}}{\lambda(\mu - \frac{1}{2})}$$

Подставляя найденные значения в исходную систему находим

$$\frac{2\mu}{\lambda(\mu - \frac{1}{2})} = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} \frac{4\mu(\mu + \frac{1}{2})}{\lambda^2 (\mu - \frac{1}{2})^3} + \frac{\lambda}{2} \frac{4\mu^2}{\lambda^2 (\mu - \frac{1}{2})^2},$$

$$\frac{2(\mu+\frac{1}{2})}{\lambda(\mu-\frac{1}{2})^2}=\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}\,\frac{4\mu^2(\mu+\frac{1}{2})}{(\mu-\frac{1}{2})^3}$$

Выражаем λ^2 из обоих уравнений

$$\lambda^2=\frac{8\mu(\mu-\frac{1}{2})^2-4\mu(\mu+\frac{1}{2})-8\mu^2(\mu-\frac{1}{2})}{(\mu-\frac{1}{2})^3}=\frac{-8\mu^2}{(\mu-\frac{1}{2})^3}$$

$$\lambda^2=\frac{4(\mu+\frac{1}{2})(\mu-\frac{1}{2})-4\mu(\mu+\frac{1}{2})}{2(\mu-\frac{1}{2})^3}=\frac{2(\mu+\frac{1}{2})}{(\mu-\frac{1}{2})^3} \qquad (5.10)$$

Отсюда следует, что μ должно удовлетворять уравнению

$$-8\mu^2=-2(\mu+\tfrac{1}{2})$$

или

$$8\mu^2-2\mu-1=0$$

$$\mu_1=1/2,\ \mu_2=-1/4$$

Первое значение для μ не подходит.

Подставляя $\mu=-1/4$ в (5.10) находим радиус сходимости λ рядов $u_1(z), u_2(z)$: $\lambda=4\sqrt{2}/3\sqrt{3}$, Следовательно $r=3\sqrt{3}/4\sqrt{2}$.

Предложение доказано.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2\sin 70^\circ}\right]^{\frac{3}{2}}\neq\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

а это показывает, что спектральные радиусы простых блужданий на группе $G_{2,\infty}$ заданной двумя представлениями

$$\langle a,b \mid a^2=e\rangle,\quad \langle b,c \mid (cb^{-1})^2=e\rangle$$

различны.

ГЛАВА 3

АЛГОРИТМ ДЭНА И ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ГРУППЕ СО СЛАБЫМ НАЛЕГАНИЕМ МНОЖЕСТВА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

§ I. Предварительные сведения из комбинаторной теории групп

Группу $G = F(a_1,\dots,a_m)/H$ можно задать образующими элементами a_ν, $\nu = 1,\dots,m$ и определяющими соотношениями

$$R_i(a_\nu) = 1\,, \quad i = 1,\dots,n$$

где R_i являются словами в символах $a_\nu^{\pm 1}$. Назовем R_i определяющими словами группы G и через M обозначим множество определяющих слов. Графическое равенство, равенство в свободной группе и равенство в группе G обозначаются соответственно через $\cong$, $\equiv$ и $=$. В этой главе мы рассмотрим группы, у которых множество определяющих соотношений M удовлетворяет следующим трем условиям:

I) каждое слово R_i несократимое

2) M замкнуто относительно операций взятия обратного слова и взятия циклических перестановок букв слова R_i,

3) если R_i и R_j не взаимно обратны, то при сокращении произведения R_iR_j поглащается $< \lambda < 1/6$ букв слова R_i, а также группы, у которых множество определяющих соотношений кроме условий I), 2) удовлетворяет ещё двум условиям

3′) если R_i и R_j не взаимно обратны, то при сокращении произведения R_iR_j поглощается $< \lambda < 1/4$ букв слова R_i,

4) если каждое из слов R_i, R_j и R_k написано на одной стороне треугольника, то сокращение не может произойти на всех трех

вершинах. В работах Гриндлингера [6], [7] доказано, что проблема тождества слов в таких группах решается при помощи алгоритма Дэна. Сформулируем основные результаты этих работ.

Если непустое несократимое слово W равно единице в группе G, то существуют натуральное число S, слова $T_1, \ldots, T_S$ и определяющие слова $R_{i_1}, \ldots, R_{i_S}$ такие, что

$$W \equiv \prod_{j=1}^{S} T_j^{-1} R_{i_j} T_j \tag{I.I}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы будем говорить, что S имеет n недостающих кусков, если S есть подслово несократимого слова V, $V=1$, V есть сокращенная форма слова $U \equiv T_1^{-1} R_1 T_1 \cdots T_i^{-1} R_i T_i \cdots T_q^{-1} R_q T_q$, $R_i = XSY$ и при любом способе сокращения слова X и Y поглощаются из R_i а S остается. n есть наименьшее натуральное число, такое, что $n+1$ слово $S R_{\beta_1} \cdots R_{\beta_n}$, $R_{\beta_n}^{-1} R_{\alpha_n}, \ldots, R_{\beta_1}^{-1} R_{\alpha_1}$ являются определяющими словами, но $R_{\beta_{k+1}} \cdots R_{\beta_n} S R_{\beta_1} \cdots R_{\beta_k}$ и $R_{\beta_k}^{-1} R_{\alpha_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ не взаимно обратны.

Если группа G такова, что множество M её определяющих соотношений удовлетворяет условиям I),2),3) то верна

ТЕОРЕМА A. Если $V=1$, V несократимо и не пусто, то существует слово $U \equiv T_1^{-1} R_1 T_1 \cdots T_n^{-1} R_n T_n$ такое, что V есть сокращенная форма слова U и для произвольного способа сокращения слова U в нем остается либо

а) часть одного из R слов, которая имеет не больше одного недостающего куска;

б) части двух R слов, каждая из которых имеет не больше двух недостающих кусков;

в) части трех R слов, одна из которых имеет не больше двух недостающих кусков, а две остальные имеют не больше трех недостающих кусков или г) части четырех R слов, каждая из которых имеет не больше трех недостающих кусков.

Следовательно, если несократимое непустое слово V равно единице в группе G, то V содержит вхождение подслова имеющего не больше трех недостающих кусков, а значит

$$\partial(S) > (1-3\lambda)\partial(R_i) \tag{I.2}$$

Пусть теперь множество M определяющих соотношений группы удовлетворяет условиям I), 2), 3), 4). Без ограничения общности можно считать, что произведение $(I.I)$ обладает следующими свойствами:

I. $T_j^{-1}R_{i_j}T_j$ несократимо $(j=1,\dots,S)$.

2. Для каждого способа сокращения произведения $\prod T_j^{-1}R_{i_j}T_j$ слово R_{i_p} сокращает не более $\partial(R_{i_q})$ букв слова R_{i_q}, $p=1,\dots,S$; $q=1,\dots,S$.

ПРедположение свойства I и отсутствие показателя -1 у слов R_{i_j} допустимы вследствие свойств I) и 2) множества определяющих слов. Предположение свойства 2 является допустимым вследствие свойства 3) множества определяющих слов и теоремы I из [3], нужную часть которой мы приводим в качестве предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $W \equiv \prod_{j=1}^{S} T_j^{-1}R_{i_j}T_j$. Тогда существует произведение $\prod (T_j')^{-1}R_{i_j}'T_j'$ равное W в группе G и такое, что каков бы ни был способ сокращения этого произведения, если $R_i' \equiv R_i^1R_i^2R_i^3$ сокращается с $R_j' \equiv R_j^1R_j^2R_j^3$ таким образом, что R_i^2 поглащает R_j^2, то $R_i^3R_i^1R_i^2$ и $R_j^2R_j^3R_j^1$ не есть взаимно обратны для всех i и j.

Ради удобства будем записывать произведение $\prod_{j=1}^{s} T_j^{-1} R_{i_j} T_j$ в виде $\prod_{i=1}^{S} T_i^{-1} R_i T_i$ предполагая, что все рассматриваемые слова такого вида обладают свойствами I,2.

ОПРЕДЕЛНИЕ. Если при данном способе сокращения полном или частичном слова $\prod_{i=1}^{S} T_i^{-1} R_i T_i$ слова R_{i_j} сокращаются со словами $R_{i_{j+1}}$ $(j=1,\dots,n;\ 1\le i_1< i_2<\dots< i_n\le S)$, ни одно R_{i_p} $(1\le p\le n)$ не сокращается ни с одним T_i^{-1} или T_i и, кроме только что отмеченных сокращений с одним (в случае $p=1$ или $p=n$, где $n>1$) или двумя (в случаях $1<p<n$) определяющими словами, R_{i_p} сокращается не более чем с одним определяющим словом и если после сокращения от слов R_{i_p} остаются подслова $R_{i_p}^c$ $(1\le p\le n)$, то слово $R_{i_1}^c \dots R_{i_n}^c$ является смежной n - кой относительно какого-либо способа сокращения $\prod_{i=1}^{S} T_i^{-1} R_i T_i$.

ТЕОРЕМА B. Если несократимое непустое слово W равно единице в группе G, то существует произведение вида $\prod_{i=1}^{S} T_i^{-1} R_i T_i$ такое, что при любом данном способе полного сокращения этого произведения слово W содержит вхождение смежной n -ки относительно этого способа сокращения.

Из определения и свойства множества M определяющих соотношений следует, что

$$\partial(R_{i_1}^c)>\partial(R_{i_1})-2\lambda\partial(R_{i_1}),\ \partial(R_{i_n}^c)>\partial(R_{i_n})-2\lambda\partial(R_{i_n})$$

$$\partial(R_{i_j}^c)>\partial(R_{i_j})-3\lambda\partial(R_{i_j})$$

Следовательно, если несократимое непусто слово W равно единице в группе G, то W содержит вхождение такого слова S, что