C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série II, p. 377-382, 1991

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

Sur la formulation vitesse-tourbillon des équations de Navier-Stokes en écoulement incompressible

Olivier DAUBE, Jean-Luc GUERMOND et Antoine SELLIER

Résumé – Des conditions d'équivalence entre la formulation en variables primitives des équations de Navier-Stokes et la formulation vitesse-tourbillon sont données en 2D et en 3D pour des écoulements incompressibles. Le cas des domaines multiplement connexes est étudié.

On the velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations in incompressible flow

Abstract – *Conditions of equivalence between the velocity-pressure and the velocity-vorticity formulations of the Navier-Stokes equations are given. Multiply connected domains are considered in* $\mathbb{R}^2$ *and* $\mathbb{R}^3$.

Abridged English Version (Equation numbers refer to the French version). – Since the early work of Fasel [3], the velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations has been an attractive alternative to the velocity-pressure formulation for a growing number of authors. It seems, though, that the equivalence between the two formulations may have been overlooked. This Note considers conditions of equivalence between the two formulations in question, especially in the case of multiply connected domains in $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$.

Let $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ be a direct, orthogonal, normed basis of $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^2$ is embedded in $\mathbb{R}^3$ so that $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ is a direct, orthogonal, normed basis of $\mathbb{R}^2$. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$. Assume that Ω is bounded, connected, and has a regular, say Lipschitzian, boundary. Let $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, consider $\Pi(\mathbf{x}_0, \Omega)$, the fundamental group of Ω (*cf.* Griffith [4], pp. 439-450). If $\Pi(\mathbf{x}_0, \Omega)$ does not reduce to the unit element, it is thereafter assumed that this group has a finite number, p, of generators that are denoted by $[\gamma_i]$, $i=1, \ldots, p$. The loops γ_i are smooth coset representatives of the homotopy cosets $[\gamma_i]$. In other words, Ω reduces to a simply connected domain once p cuts have been made in Ω. If $\Pi(\mathbf{x}_0, \Omega)$ reduces to the unit element, we set $p=0$; that is to say, Ω is simply connected.

We recall hereafter some results concerning the null space of the curl operator. Consider $\xi \in C^1(\Omega)^n$ where $n=2$ or 3. Assume the curl of ξ is zero, then there is $\varphi \in C^1(\Omega)$ so that $\xi = \nabla \varphi$ if and only if $\int_{\gamma_i} \xi . d\mathbf{l}$ is zero for $i=1, \ldots, p$ (*cf.* Theorem 2.1). Furthermore, $\xi \in C^1(\Omega)^n$ is such that $\nabla \times \xi = 0$, $\nabla . \xi = 0$, $\xi . \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0$, and $\int_{\gamma_i} \xi . d\mathbf{l} = 0$ if and only if ξ is zero (*cf.* Theorem 2.2). Actually, it can be shown that, if ξ is regular enough and $\nabla \times \xi = 0$, the conditions $\int_{\gamma_i} \xi . d\mathbf{l} = 0$ mean that ξ is orthogonal to $\mathbb{H}_1(\Omega) := \{ \xi \in L^2(\Omega)^n : \nabla \times \xi = 0, \nabla . \xi = 0, \xi . \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0 \}$ in $L^2(\Omega)$ (*cf.* Dautray et Lions [2], Chap. IX, § 1). In three-dimensional domains, corollary 2.1 gives necessary and sufficient conditions for two vector fields $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\omega}$ to be such that $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Note présentée par Paul GERMAIN.

0764-4450/91/03130377 $ 2.00 © Académie des Sciences

Consider the incompressible flow of a Newtonian fluid in Ω. The governing equations are $\nabla.\mathbf{u}=0$ and $\partial\mathbf{u}/\partial t+\nabla(\mathbf{u}^2/2+P/\rho)+(\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{u}-\nu\nabla^2\mathbf{u}-\mathbf{f}=0$, supplemented by the boundary condition $\mathbf{u}=\mathbf{u}_b$ on $\partial\Omega$ and the initial condition $\mathbf{u}(x, 0)=\mathbf{u}_0(x)$. Denote by $(\mathscr{P})$ this problem. $(\mathscr{P})$ is well-posed if the source term f and the initial and boundary conditions are regular enough.

Alternative formulations of Navier-Stokes equations in term of velocity and vorticity are considered thereafter.

Equivalence between the (u, P) and (u, ω) formulations is stated in Theorem 3.3. This theorem says that problem $(\mathscr{P})+(\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u})$ is equivalent to $(\mathscr{P}')$. Note that, in accordance with theorem 2.1, circulation conditions along the loops γ_i are to be enforced so that there exists a uniform function P such that $\partial\mathbf{u}/\partial t+(\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{u}-\nu\nabla^2\mathbf{u}-\mathbf{f}$ is equal to $-\nabla(\mathbf{u}^2/2+P/\rho)$. Note also that in 2D, if the holes in Ω are fixed obstacles (*i.e.* $\mathbf{u}_b=0$), then the boundaries of the obstacles can be taken as limits of the loops γ_i, and the circulation conditions reduce to the well-known conditions $\nu\int_{\gamma_i}\partial\omega/\partial n\, dl=\int_{\gamma_i}\mathbf{f}.d\mathbf{l}$, where we have set $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$.

The equation $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u}$ is of the first order, the drawback of this formulation is that only a few numerical methods are developed for this kind of equation. However, it is well-known that, since $\mathbf{u}$ is divergence free, the couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ satisfies the equation $\nabla^2\mathbf{u}=-\nabla\times\boldsymbol{\omega}$. Since this equation is elliptic, it may be numerically more attractive than the former. This new formulation is studied in the sequel of this Note.

In three dimensions, the new formulation is summarized in theorem 4.4. This theorem says that problem $(\mathscr{P}')$ is equivalent to $(\mathscr{P}'')$. A solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ of $(\mathscr{P}')$ is obviously a solution to $(\mathscr{P}'')$. Conversely, let $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ be a solution to $(\mathscr{P}'')$. By taking the divergence of the convection-diffusion equation for $\boldsymbol{\omega}$, we see that $\nabla.\boldsymbol{\omega}$ is a solution to the heat equation. The boundary and initial conditions on $\nabla.\boldsymbol{\omega}$ imply that $\nabla.\boldsymbol{\omega}$ is zero throughout Ω. Furthermore, by taking the divergence of the Poisson equation for $\mathbf{u}$, we see that $\nabla.\mathbf{u}$ satisfies the homogeneous problem $\nabla^2(\nabla.\mathbf{u})=0$ and $\nabla.\mathbf{u}=0$ on $\partial\Omega$, whose unique solution is $\nabla.\mathbf{u}=0$ in Ω. Conditions of corollary 2.1 are satisfied, that is to say, $\boldsymbol{\omega}$ is the curl of $\mathbf{u}$.

In two dimensions we have a somewhat simpler result since for every differentiable scalar field φ, the divergence of $\varphi\mathbf{k}$ is zero, and the curl of every differentiable vector field $\boldsymbol{\varphi}$ is parallel to $\mathbf{k}$. Our main result in two-dimensional domains is summarized by theorem 5.5. This theorem says that problem $(\mathscr{P}')$ is equivalent to $(\mathscr{P}''')$. A solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ of $(\mathscr{P}')$ is obviously a solution to $(\mathscr{P}''')$. Conversely, let $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ be a solution to $(\mathscr{P}''')$. We show that $\nabla.\mathbf{u}=0$ in Ω by the same technique as that of theorem 4.4. Furthermore, the Poisson equation for $\mathbf{u}$ implies that $\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}-\nabla\times\mathbf{u})=0$. But for every differentiable scalar field φ we have $\nabla\times(\varphi\mathbf{k})=-\mathbf{k}\nabla\varphi$; hence, the gradient of $\omega-(\nabla\times\mathbf{u}).\mathbf{k}$ is zero in Ω. But the integral of $\omega-(\nabla\times\mathbf{u}).\mathbf{k}$ on r is zero and Ω is connected; as a result, $\omega\mathbf{k}$ is the curl of $\mathbf{u}$ throughout Ω.

For other details on the $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ formulation in a simply connected two-dimensional domain and the numerical approximation of the solution to the problem by an influence matrix technique, the reader is referred to Daube [1] and Ruas [5].

---

1. Introduction. — Depuis les premiers travaux de Fasel [3], la résolution des équations de Navier-Stokes écrites en formulation vecteur vitesse-vecteur tourbillon pour un écoulement incompressible a été abordée dans un nombre croissant d'études. Outre le fait que cette formulation est valable aussi bien en configuration bidimensionnelle que tridimensionnelle, deux raisons essentielles motivent ces travaux.

D'une part, comme l'a montré Speziale [6], la forme des équations de transport du vecteur tourbillon est la même que l'on soit en repère galiléen ou en repère non inertiel. Dans ce dernier cas les effets de rotation sont pris en compte au travers des conditions aux limites.

D'autre part, l'utilisation du vecteur tourbillon en tant que variable dépendante semble préférable dans la définition de conditions aux limites ouvertes pour les écoulements en domaine non borné.

L'objet de cette Note est de préciser les conditions d'équivalence entre la formulation en variables primitives des équations de Navier-Stokes et la formulation vitesse-tourbillon, plus particulièrement dans le cas de domaines multiplement connexes.

2. Préliminaires. — On rappelle dans un premier temps quelques résultats concernant le noyau du rotationnel en insistant sur les problèmes de connexité multiple. Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Par la suite on injecte $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est considéré comme vecteur de $\mathbb{R}^3$. Soit π la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit φ une application définie sur $\mathbb{R}^2$, on note $\tilde{\varphi}$ le prolongement de φ à $\mathbb{R}^3$ tel que $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})=\varphi(\pi(\mathbf{x}))$ pour tout $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. Par la suite on omet le tilde au-dessus φ.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, borné, connexe et de frontière suffisament régulière. Soit $\mathbf{x}_0\in\Omega$, on considère $\Pi(\mathbf{x}_0, \Omega)$ le groupe fondamental de Ω (*cf.* Griffith [4], p. 439-450). Si $\Pi(\mathbf{x}_0, \Omega)$ n'est pas réduit au neutre, on suppose alors par la suite que ce groupe possède un nombre fini p de générateurs qu'on note $[\gamma_i]$, $i=1, \ldots, p$, où les lacets γ_i sont des représentants C^∞ des classes d'homotopie $[\gamma_i]$. C'est-à-dire, Ω peut être rendu simplement connexe en procédant à p coupures dans Ω. Dans le cas contraire on pose $p=0$; c'est-à-dire que Ω est simplement connexe. On peut alors énoncer les résultats suivants :

Théorème 2.1. — *Soit* $\xi\in C^1(\Omega)^n$ *avec* $n=2$ *ou* 3. *On a l'équivalence :*

$$(2.1)\qquad \left(\nabla\times\xi=0,\ \int_{\gamma_i}\xi.d\mathbf{l}=0 \text{ pour } i=1,\ldots,p\right)\ \Leftrightarrow\ (\exists\,\varphi\in C^1(\Omega);\ \xi=\nabla\varphi).$$

Théorème 2.2. — *Soit* $\xi\in C^1(\Omega)^n$ *avec* $n=2$ *ou* 3, *alors on a :*

$$(2.2)\qquad \left(\nabla\times\xi=0,\ \nabla.\xi=0,\ \xi.\mathbf{n}_{|\partial\Omega}=0,\ \int_{\gamma_i}\xi.d\mathbf{l}=0: i=1,\ldots,p\right)\ \Leftrightarrow\ (\xi=0).$$

Noter que ces résultats peuvent se généraliser dans le cadre hilbertien classique de $L^2(\Omega)$. La difficulté essentielle pour cette généralisation est de pouvoir définir la trace de ξ dans $L^1(\gamma_i)^n$. C'est en particulier possible si on prend ξ dans $H^1(\Omega)^n$. En fait, pour tout champ de vecteur ξ suffisamment régulier et à rotationnel nul, la nullité des circulations de ξ sur les contours γ_i signifie que ξ est dans l'orthogonal au sens $L^2(\Omega)$ de $\mathbb{H}_1(\Omega):=\{\xi\in L^2(\Omega)^n: \nabla\times\xi=0,\ \nabla.\xi=0,\ \xi.\mathbf{n}_{|\partial\Omega}=0\}$ (*cf.* Dautray et Lions [2], chap. IX, § 1).

On déduit du théorème 2.2 le corollaire suivant en dimension 3 :

COROLLAIRE 2.1. — *Soit* $\boldsymbol{\omega} \in C^1(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^3$ *tel que* $\nabla . \mathbf{u} = 0$, *alors on a* :

$$(2.3) \qquad (\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \\ \nabla . \boldsymbol{\omega} = 0 \\ (\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{u}) . \mathbf{n} = 0 \quad sur\ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} (\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{u}) . d\mathbf{l} = 0,\ i = 1, \ldots, p \end{array} \right).$$

Noter que ce résultat n'est pas valable en dimension 2. Par contre, il peut, lui aussi, être généralisé pour $\boldsymbol{\omega} \in H^1(\Omega)^3$ et $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3$.

3. ÉQUIVALENCE DES FORMULATIONS $(\mathbf{u}, P)$ ET $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$. — On considère l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien homogène soumis à une force massique $\mathbf{f}$ et occupant le domaine Ω. Dans un référentiel galiléen, les équations de Navier-Stokes formulées en variables primitives, vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et pression $P(\mathbf{x}, t)$, s'écrivent :

$$(3.1) \qquad (\mathscr{P}) \left\{ \begin{array}{c} \nabla . \mathbf{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\dfrac{\mathbf{u}^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} \right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b, \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \end{array} \right.$$

La vitesse $\mathbf{u}_b$ doit vérifier la condition de compatibilité $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_b . \mathbf{n}\, dl = 0$ et $\mathbf{u}_0$ doit être à divergence nulle. Le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé dès que les données initiales et à la frontière sont suffisamment régulières.

On donne maintenant une première formulation alternative du problème $(\mathscr{P})$ en variables $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$, où $\boldsymbol{\omega}$ est le rotationnel de la vitesse $\mathbf{u}$:

THÉORÈME 3.3. — *Le problème* $(\mathscr{P}) + (\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u})$ *est équivalent au problème* $(\mathscr{P}')$ *suivant* :

$$(3.2) \qquad (\mathscr{P}') \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = -\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \mathbf{f}) \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \\ \nabla . \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad sur\ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right) . d\mathbf{l} = \int_{\gamma_i} \mathbf{f} . d\mathbf{l}, \qquad i = 1, \ldots, p. \end{array} \right.$$

Démonstration. — L'implication est évidente. Réciproquement, grâce aux p conditions de circulation le long des lacets γ_i et en posant $\xi = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f}$, on se trouve dans les conditions d'application du théorème 2.1 pour ξ. C'est-à-dire, il existe une fonction P, uniforme, telle que ξ soit égale à $-\nabla(\mathbf{u}^2/2 + P/\rho)$.

Noter que dans le cas bidimensionnel, si les trous de Ω sont des obstacles fixes (*i. e.* $\mathbf{u}_b$ est nul), alors les lacets γ_i peuvent se ramener sur la surface des obstacles en question et

les conditions de circulation se simplifient et se réduisent aux conditions bien connues :

$$(3.3) \qquad \nu \int_{\gamma_i} \frac{\partial \omega}{\partial n}\, dl = \int_{\gamma_i} \mathbf{f} . d\mathbf{l} \qquad \text{pour} \quad i = 1 \ldots p,$$

où on a posé $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$.

L'équation reliant $\mathbf{u}$ à $\boldsymbol{\omega}$ est du premier ordre, or assez peu d'outil numériques sont développés pour ce type d'équation. En utilisant le fait que $\mathbf{u}$ est à divergence nulle, on montre que le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ vérifie l'équation $\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$. Cette équation est elliptique, elle pourrait être, en conséquence, plus attrayante numériquement que la précédente. On étudie par la suite les possibilités d'utilisation de cette formulation.

4. FORMULATION VITESSE TOURBILLON EN 3 D. — On donne maintenant une formulation alternative du problème $(\mathscr{P}')$ en variables $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$. Le résultat essentiel est le suivant :

THÉORÈME 4.4. — *En dimension* 3, *le problème* $(\mathscr{P}')$ *est équivalent au problème* $(\mathscr{P}'')$ *suivant* :

$$(4.1) \qquad (\mathscr{P}'') \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = -\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \mathbf{f}) \\ \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \\ \nabla . \boldsymbol{\omega} = 0 \quad sur\ \partial\Omega \\ \nabla . \mathbf{u} = 0 \quad sur\ \partial\Omega \\ \boldsymbol{\omega} . \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{u}) . \mathbf{n} \quad sur\ \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad sur\ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right) . d\mathbf{l} = \int_{\gamma_i} \mathbf{f} . d\mathbf{l}, \qquad i = 1, \ldots, p \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} (\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{u}) . d\mathbf{l} = 0, \qquad i = 1, \ldots, p \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}) \quad et \quad \nabla . \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}) = 0. \end{array} \right.$$

Démonstration. — On propose ici une démonstration formelle. L'implication est évidente. Réciproquement, en prenant la divergence de l'équation de convection-diffusion de $\boldsymbol{\omega}$, on voit que $\nabla . \boldsymbol{\omega}$ satisfait à l'équation de la chaleur homogène. Les conditions aux limites et initiales sur $\nabla . \boldsymbol{\omega}$ impliquent $\nabla . \boldsymbol{\omega}$ est nul dans Ω. De plus, en prenant la divergence de l'équation de Poisson sur $\mathbf{u}$ on obtient un problème de Dirichlet homogène : $\nabla^2 (\nabla . \mathbf{u}) = 0$ et $\nabla . \mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$, dont l'unique solution est $\nabla . \mathbf{u} = 0$ dans Ω. Les conditions d'application de la réciproque du corollaire 2.1 sont vérifiées, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\omega}$ est bien le rotationnel de $\mathbf{u}$, ce qui achève la démonstration.

5. FORMULATION VITESSE TOURBILLON EN 2 D. — On se place maintenant en dimension 2. Par la suite on injecte $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ comme cela a été défini en paragraphe 2. Noter que pour tout champ scalaire φ différentiable sur Ω, la divergence du champ de vecteur $\varphi \mathbf{k}$ est nulle, et pour tout champ de vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ différentiable sur Ω, le rotationnel est dirigé selon $\mathbf{k}$.

La formulation vitesse-tourbillon alternative des équations de Navier-Stokes en dimension 2 est donnée par :

THÉORÈME 5.5. — *En dimension 2, le problème ($\mathscr{P}'$) est équivalent au problème ($\mathscr{P}'''$) suivant :*

$$(5.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega\right)\mathbf{k} = -\nabla \times (\omega\,\mathbf{k} \times \mathbf{u} - \mathbf{f}) \\ \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{k} \times \nabla \omega \\ \nabla . \mathbf{u} = 0 \quad sur\ \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad sur\ \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \omega\,\mathbf{k} \times \mathbf{u}\right) . d\mathbf{l} = \int_{\gamma_i} \mathbf{f} . d\mathbf{l}, \qquad i = 1, \ldots, p \\ \displaystyle\int_{\Omega} \omega\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_b . d\mathbf{l} \\ \omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}). \end{array}\right.$$

Démonstration. — L'implication est évidente. Réciproquement, on montre comme pour le théorème 4.4 que $\nabla . \mathbf{u}$ est nul dans Ω. De plus, l'équation de Poisson sur $\mathbf{u}$ implique $\nabla \times (\omega\,\mathbf{k} - \nabla \times \mathbf{u}) = 0$. Or pour tout champ scalaire différentiable φ, on a $\nabla \times (\varphi\,\mathbf{k}) = -\mathbf{k} \times \nabla \varphi$. Ainsi le gradient de $\omega - (\nabla \times \mathbf{u}) . \mathbf{k}$ est nul sur Ω, mais $\int_{\Omega} (\omega - (\nabla \times \mathbf{u}) . \mathbf{k})\, dx$ est nul et Ω est connexe, donc $\omega\,\mathbf{k}$ est égal au rotationnel de $\mathbf{u}$ partout.

Pour d'autres détails sur la formulation en dimension 2 et la résolution numérique du problème par une technique de matrice d'influence, le lecteur est renvoyé à Daube [1] et Ruas [5].

Note remise le 25 avril 1991, acceptée le 24 juin 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] O. DAUBE, *Resolution of the 2 D Navier-Stokes equations in velocity-vorticity form by means of an influence matrix technique*, accepté pour publication, *J. of Comp. Phys.*, 1991.

[2] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, II, 1985.

[3] H. FASEL, Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations, *J. Fluid Mech.*, 78, 1976, p. 355-383.

[4] H. B. GRIFFITH et P. J. HILTON, *Classical Mathematics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[5] V. RUAS, Variational approaches to the two-dimensional Stokes system in terms of the vorticity, *Mechanics Research Communications*, 1991.

[6] C. G. SPEZIALE, On the advantages of the vorticity-velocity formulation of the equations of fluid dynamics, *J. of Comp. Phys.*, 73, 1987, p. 476-480.

O. D. et J.-L. G. : *L.I.M.S.I.-C.N.R.S.*, B.P. n° 133, 91403 *Orsay Cedex;*
A. S. : *LADHYX*, *École Polytechnique*, 91128, *Palaiseau Cedex.*