Numer. Math. 67: 465–473 (1994)

Numerische Mathematik

Remarques sur les méthodes de projection pour l'approximation des équations de Navier–Stokes

Jean-Luc Guermond

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, C.N.R.S., BP 133, 91403, Orsay, France
guermond@frlim51.bitnet

Received June 1, 1993

Summary. This paper shows that the convergence estimates on the pressure given in [5] and [6] for a series of projection methods are not correctly obtained since they are all based on an inequality which is not correct. It seems that a convergence rate of order $O(\delta t)$ in $H^2(\Omega)^d$ for the velocity is required to establish convergence estimates of order $O(\delta t)$ for the pressure. As conclusion, the conjecture that projection methods yield convergence rates of order higher than $O(\delta t^{1/2})$ for the pressure remains an open question.

Résumé. L'objet de cet article est de montrer que les estimations de convergence sur la pression pour les méthodes de projection décrites dans [5] et [6] ne sont pas obtenues correctement car elles sont toutes basées sur une inégalité fausse. Il semble qu'on ait besoin d'une convergence en $O(\delta t)$ de la vitesse dans $H^2(\Omega)^d$ pour démontrer les estimations de convergence sur la pression en $O(\delta t)$. La question de savoir si la méthode de projection a un taux de convergence pour la pression plus élevé que $O(\delta t^{1/2})$ reste ouverte.

Mathematics Subject Classification (1991): 35A40, 65J15

1. Introduction

Les méthodes de projection introduites par Chorin [1] et Temam [9] pour approcher numériquement les solutions des équations de Navier–Stokes instationnaires sont largement utilisées pour leur simplicité et leur efficacité (au moins pour l'approximation de la vitesse). Cette classe de méthodes permet de découpler les approximations de la vitesse et de la pression à chaque pas de temps, évitant ainsi les difficultés inhérentes à la résolution du problème de Stokes. Afin d'illustrer ces méthodes, considérons le problème de Stokes instationnaire dans un domaine fluide Ω:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\nabla^2 u + \nabla p = f \\ \mathrm{div} u = 0 \\ u_{|\Gamma} = 0 \\ u(t=0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

où u et p sont respectivement la vitesse et la pression. L'ouvert Ω est borné connexe régulier de $\mathbb{R}^d$, disons lipschitzien pour fixer les idées, et Γ est sa frontière. Les données f et u_0 sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution dans un bon cadre fonctionnel, i.e. on se place dans le cadre d'application du théorème de Lions (cf. Lions-Magenes [3, p. 257] ou Temam [8, p. 253]).

On s'intéresse par la suite à l'approximation de la solution de (1.1) sur un intervalle de temps fini $[0, T]$. Introduisons une partition de l'intervalle de temps: $t^k = k\delta t$ pour $0 \leq k \leq K$ où $\delta t = T/K$. L'idée de base des méthodes de projection repose sur une stratégie de prédiction-correction: elle consiste à construire deux suites d'approximation de la vitesse (u_k) et $(\tilde{u}_k)$ et une suite d'approximation de la pression (p_k) telles que, à chaque pas de temps $\tilde{u}_{k+1}$ soit une prédiction de $u(t^{k+1})$ et u_{k+1} une correction de $\tilde{u}_{k+1}$. L'algorithme consistant d'ordre 1 le plus simple s'écrit:

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_{k+1} - u_k}{\delta t} - \nu\nabla^2\tilde{u}_{k+1} = f_{k+1} - \nabla p_k \\ \tilde{u}_{k+1|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

et

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}}{\delta t} + \nabla(p_{k+1} - p_k) = 0 \\ \text{div } u_{k+1} = 0 \\ u_{k+1}.n_{|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

La suite (u_k) est initialisée par $u_0 = v_0$ et la suite (p_k) initialisée en prenant p_0 arbitraire.

Remarquons que le second système est équivalent à $u_{k+1} = P_H\tilde{u}_{k+1}$ et $\nabla(p_{k+1} - p_k) = (\tilde{u}_{k+1} - P_H\tilde{u}_{k+1})/\delta t$ où H est le sous-espace de $L^2(\Omega)^d$ défini par:

$$\text{(1.4)} \qquad H = \{u \in L^2(\Omega)^d,\ \text{div } u = 0,\ u.n = 0\},$$

et P_H désigne la projection orthogonale de $L^2(\Omega)^d$ sur H. La vitesse $\tilde{u}_{k+1}$ est une prédiction de $u(t^{k+1})$ qui satisfait la bonne condition au bord mais n'est pas à divergence nulle. Ce défaut est corrigé en projetant $\tilde{u}_{k+1}$ sur H (d'où le nom de la méthode), toutefois la projection u_{k+1} ne satisfait plus entièrement la condition au bord; seule la composante normale de la vitesse est nulle.

Le gros avantage technique de l'algorithme (1.2)–(1.3) est de ne faire appel qu'à des solveurs du problème de Helmholtz et du problème de Poisson avec condition de Neumann homogène. Cet algorithme contourne ainsi les difficultés liées à l'approximation numérique du problème de Stokes.

Sous des hypothèses de régularité suffisantes sur la solution (u, p) de (1.1), en l'occurence si:

$$\text{(1.5)} \qquad \int_0^T \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_0^2 \mathrm{d}t < \infty$$

$$\text{(1.6)} \qquad \int_0^T \left|\frac{\partial\nabla p}{\partial t}\right|_0^2 \mathrm{d}t < \infty$$

il est alors possible d'obtenir les estimations suivantes:

$$\text{(1.7)} \qquad \sup_{0\leq k\leq K} |u(t^k) - u_k|_0 \leq c\delta t$$

(1.8) $$\left[\delta t \sum_{1}^{K} |u(t^k) - \tilde{u}_k|_1^2\right]^{1/2} \leq \frac{c}{\sqrt{\nu}}\delta t$$

(1.9) $$\left[\delta t \sum_{1}^{K} |p(t^k) - p_k|_0^2\right]^{1/2} \leq c\delta t^{1/2}$$

où c désigne une constante générique strictement positive. Noter que la convergence sur la pression est assez pauvre comparée à celle obtenue sur la vitesse. Lorsque le terme ∇p_k est absent de (1.2) (version originale de l'algorithme par Chorin [1] et Temam [9]), les estimations sur la vitesse sont en $O(\delta t^{1/2})$ comme pour la pression.

On peut affaiblir l'hypothèse de régularité (1.5) en supposant uniquement:

(1.10) $$\int_0^T \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{-1}^2 \mathrm{d}t < \infty.$$

Dans ce cas les estimations (1.7), (1.8) et (1.9) sont encore correctes en remplaçant les constantes c par c/ν.

Dans deux articles récents, J. Shen propose de montrer qu'en conservant les hypothèses de régularité de la solution (1.6) et (1.10), l'estimation de convergence en $O(\delta t^{1/2})$ pour la pression peut être améliorée en $O(\delta t)$ [5, p. 72, Th. 2] et [6, p. 55, Th. 1]. Ce résultat serait en soit très intéressant s'il était correctement démontré. Or, l'auteur base toutes ses estimations pour la pression sur une inégalité qui n'est pas valable ici. Plus précisement, l'auteur introduit l'opérateur de Stokes $A = -P_H\nabla^2$, dont le domaine est le sous-espace de $H^2(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d$ constitué des fonctions à divergence nulle, et il a besoin que $(u, A^{-1}u)$ réalise une norme équivalente à celle de $H^{-1}(\Omega)^d$ pour tout u dans H. En d'autre termes, l'auteur a besoin (cf. (2.1) dans [5] et (2.7) dans [6]) de l'existence de deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

(1.11) $$\forall u \in H, \qquad c_1|u|_{-1}^2 \leq (u, A^{-1}u) \leq c_2|u|_{-1}^2.$$

L'existence de la constante c_2 est évidente; par contre la constante c_1, qui est fondamentale ici, n'existe pas (i.e. $c_1 = 0$) comme nous le montrons par la suite.

Le présent exposé est organisé comme suit. Dans une première partie on introduit l'opérateur de Stokes dans un cadre optimal et on rappelle les arguments défendus dans [5], [6]. Du cadre optimal présenté on déduit quelques arguments qui montrent que la convergence d'ordre 1 de la vitesse dans $H^1(\Omega)^d$ est insuffisante pour obtenir une convergence d'ordre 1 de la pression. Ceci semble indiquer qu'à moins d'obtenir une convergence de la vitesse $\widetilde{u}_{k+1}$ dans $H^2(\Omega)^d$, on ne peut pas espérer une convergence sur la pression plus forte qu'en $O(\delta t^{1/2})$. Dans une seconde partie on donne un résultat de densité qui permet de construire un contre-exemple à (1.11). Le contre-exemple en question et quelques conclusions sont présentés dans la dernière partie.

2. L'opérateur de Stokes

Afin d'éclairer l'exposé, on rappelle et on analyse l'idée poursuivie par J. Shen. Tout d'abord, pour définir correctement l'opérateur de Stokes, introduisons l'espace:

(2.1) $$H_0^{\mathrm{div}}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^d,\ \mathrm{div}\, u \in L^2(\Omega),\ u.n_{|\Gamma} = 0\}.$$

Muni de la norme $\left(|u|_0^2 + |\text{div } u|_0^2\right)^{1/2}$, $H_0^{\text{div}}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Soit $\mathscr{D}(\Omega)^d$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. On peut montrer que $\mathscr{D}(\Omega)^d$ est dense dans $H_0^{\text{div}}(\Omega)$ (cf. Girault-Raviart [2, p. 29]). Le dual de $H_0^{\text{div}}(\Omega)$ est donc un espace de distributions et on a les inclusions (avec densité et continuité):

$$H_0^1(\Omega)^d \subset H_0^{\text{div}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)^d \equiv (L^2(\Omega)^d)' \subset H_0^{\text{div}}(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)^d. \tag{2.2}$$

D'autre part:

Lemme 2.1. *On a la décomposition*

$$H_0^{\text{div}}(\Omega)' = H \oplus \nabla(L^2(\Omega)/\mathbb{R}). \tag{2.3}$$

Démonstration. Il est clair que l'espace de droite est contenu dans $H_0^{\text{div}}(\Omega)'$. Réciproquement, soit $l \in H_0^{\text{div}}(\Omega)'$. On résout dans un premier temps le problème: trouver $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \qquad (u, v) = < l, v >$$

où $< .,. >$ désigne la dualité entre $H_0^{\text{div}}(\Omega)'$ et $H_0^{\text{div}}(\Omega)$ et $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)^d$. Comme $(.,.)$ est aussi un produit scalaire dans H, ce problème a une solution unique $u \in H$ et

$$|u|_0 \leq |l|_{H_0^{\text{div}}(\Omega)'}.$$

D'après la définition de u, la forme linéaire $l - u \in H_0^{\text{div}}(\Omega)'$ s'annule sur H. D'après les inclusions (2.2) on peut considérer $l - u$ comme une forme de $H^{-1}(\Omega)^d$ et d'après la définition de u cette forme s'annule sur V. D'après le théorème de De Rham [4], il existe un p dans $L^2(\Omega)$ défini à une constante près tel que $l - u = \nabla p$. De plus on a (cf. par exemple Girault-Raviart [2, p. 20]):

$$|p|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c|l - u|_{-1}$$

En conclusion on a $l = u + \nabla p$ et la décomposition est unique. □

La décomposition (2.3) généralise celle, bien connue, de $L^2(\Omega)^d = H \oplus \nabla(H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ (cf. Girault-Raviart [2, p. 29] ou Temam [8, p. 17] par exemple) et permet de définir une extension de la projection orthogonale P_H à $H_0^{\text{div}}(\Omega)'$; par la suite on note encore par abus de notation $P_H : H_0^{\text{div}}(\Omega)' \to H$ l'extension en question.

Introduisons $V = \{u \in H_0^1(\Omega)^d;\ \text{div } u = 0\}$ et $D(A) = \{u \in V;\ \nabla^2 u \in H_0^{\text{div}}(\Omega)'\}$. Définissons l'opérateur de Stokes A tel que:

$$\begin{aligned} A : D(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -P_H \nabla^2 u \end{aligned} \tag{2.4}$$

On vérifie aisément que A est non borné, fermé, elliptique, auto-adjoint et inversible, d'inverse compact dans H. Remarquons de plus que si Ω est C^2 les théorèmes de régularité de la solution du problème de Stokes permettent de prendre $D(A) = H^2(\Omega)^d \cap V$ comme cela est fait dans [5], [6].

Pour étudier la convergence de l'algorithme (1.2)–(1.3) on définit les fonctions d'erreurs $e_k = u(t^k) - u_k$, $\tilde{e}_k = u(t^k) - \tilde{u}_k$ et $\delta_k = p(t^k) - p_k$. En soustrayant (1.2)+(1.3) de (1.1) on obtient le système:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{e_{k+1} - e_k}{\delta t} + \nabla \delta_{k+1} & = & -R_k + \nu \nabla^2 \tilde{e}_{k+1} \\ \operatorname{div}\left(\dfrac{e_{k+1} - e_k}{\delta t}\right) & = & 0 \\ \left(\dfrac{e_{k+1} - e_k}{\delta t}\right) . n_{|\Gamma} & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.5}$$

où R_k est le reste intégral de Taylor:

$$R_k(x) = \frac{1}{\delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t - t^k) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

L'idée poursuivie dans [5], [6] consiste à dire qu'il est possible de contrôler $|e_{k+1} - e_k|_{-1}/\delta t$ et $|\delta_{k+1}|_0$ par la norme de $-R_k + \nu \nabla^2 \tilde{e}_{k+1}$ dans $H^{-1}(\Omega)^d$. Pour ce faire, en remarquant que $(e_{k+1} - e_k)$ est dans H, l'auteur dualise la première équation par $A^{-1}(e_{k+1} - e_k)$, faisant ainsi disparaître le gradient de δ_{k+1} et applique l'inégalité (1.11) pour obtenir la majoration:

$$c_1 \frac{|e_{k+1} - e_k|_{-1}^2}{\delta t} \leq c| - R_k + \nu \nabla^2 \tilde{e}_{k+1}|_{-1} |e_{k+1} - e_k|_{-1} \tag{2.7}$$

d'où

$$\frac{|e_{k+1} - e_k|_{-1}}{\delta t} \leq c(|R_k|_{-1} + \nu |\tilde{e}_{k+1}|_1) \tag{2.8}$$

et par conséquent

$$|\delta_{k+1}|_0 \leq c |\nabla \delta_{k+1}|_{-1} \leq c'(|R_k|_{-1} + \nu |\tilde{e}_{k+1}|_1) \tag{2.9}$$

Cette inégalité "assure" la convergence de la pression en $O(\delta t)$ car on peut effectivement contrôler $|R_k|_{-1}$ en $O(\delta t)$ en demandant une régularité de u du type (1.10), et $|\tilde{e}_{k+1}|_1$ est contrôlé en $O(\delta t)$ par (1.8).

Malheureusement la minoration (1.11) étant fausse, comme nous le montrons par la suite, l'obtention de (2.8) et (2.9) est donc incorrecte. D'autre part, à la lumière de ce qui est montré au début de cette section, il semble que (2.8) et (2.9) aient peu de chances d'être vraies sans exiger plus de régularité de la solution. En effet, d'après le lemme 2.1: $H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)' = H \oplus \nabla(L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, c'est à dire que le couple $((e_{k+1} - e_k)/\delta t, \delta_{k+1}) \in H \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ réalise la décomposition de $-R_k + \nu \nabla^2 \tilde{e}_{k+1}$ dans $H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'$. Ainsi, la première égalité de (2.5) est "optimale" dans $H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'$ et non pas dans $H^{-1}(\Omega)^d$. Par continuité des projections induites par la décomposition de $H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'$ on obtient les estimations optimales:

Corollaire 2.1

$$\frac{|e_{k+1} - e_k|_0}{\delta t} \leq c(|R_k|_{H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'} + |\nu \nabla^2 \tilde{e}_{k+1}|_{H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'}) \tag{2.10}$$

$$|\delta_{k+1}|_0 \leq c(|R_k|_{H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'} + |\nu \nabla^2 \tilde{e}_{k+1}|_{H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'}) \tag{2.11}$$

En conséquence, pour obtenir une convergence sur la pression en $O(\delta t)$ il faut contrôler la norme de $\nabla^2 \tilde{e}_{k+1}$ dans $H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)'$, c'est-à-dire il faut avoir une estimation sur la norme de $\tilde{e}_{k+1}$ dans $\nabla^{-2}(H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)')$, où ∇^{-2} désigne l'inverse de $\nabla^2 : H_0^1(\Omega)^d \to H^{-1}(\Omega)^d$. Un tel contrôle "optimal" semble relativement difficile à obtenir puisque, à la connaissance de l'auteur, il n'existe pas de propriété de monotonie connue du laplacien sur des espaces strictement compris entre $H^{-1}(\Omega)^d$ et $L^2(\Omega)^d$ d'une part ou entre $L^2(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d$ d'autre part. En d'autres termes, pour obtenir une bonne convergence de la pression (i.e. en $O(\delta t)$) il faudrait une convergence de la vitesse $(\tilde{u}_k)$ dans $H^2(\Omega)^d$. Mais celle-ci semble peu probable.

Ces problèmes de convergence sur la pression se généralisent aux autres types de méthodes de projection (Navier–Stokes, ordre élevé, etc...), puisque le système (2.5) est, semble-t-il, un point passage obligatoire pour obtenir des estimations sur la pression.

Cette difficulté de convergence est probablement à mettre sur le compte du fait que la suite des pressions est solution du problème (1.3) qui impose implicitement la condition de Neumann arbitraire $\partial p_k/\partial n_{|\Gamma} = \ldots = \partial p_0/\partial n_{|\Gamma}$ (cf. Temam [10] pour d'autres arguments dans ce sens). Elle est peut-être aussi à mettre en parallèle avec, semble-t-il, l'impossibilité d'obtenir une régularité convenable de la pression lorsque le terme source n'est pas très régulier. En effet pour Ω borné connexe lipschitzien, et $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$, on peut montrer l'exitence de u dans $L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$ et $du/dt \in L^2(0,T;V')$, mais l'existence de la pression n'est assurée qu'au sens des distributions dans $\mathscr{D}'(0,T;L^2(\Omega))$. La difficulté tient au fait essentiel que V' n'est pas un espace de distribution (cf. Simon [7] pour d'autres détails sur les particularités de cet espace).

3. Un résultat de densité

Avant d'exhiber un contre-exemple démontrant que (1.11) est faux, on établit un résultat de densité des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et à divergence nulle, dans un sous-espace des distributions de $H^{-1}(\Omega)^d$ à divergence nulle.

Par la suite on fait l'hypothèse que la frontière Γ de Ω a un nombre fini de composantes connexes: $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, où Γ_0 désigne la frontière de la composante connexe infinie de $\Omega' = \mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}$.

Soit B le sous-espace fermé de $H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que:

$$B = \{p \in H^2(\Omega)/\mathbb{R};\ \nabla p \in H_0^1(\Omega)^d\} \tag{3.1}$$

On vérifie aisément que pour tout p dans B, $\partial p/\partial n_{|\Gamma} = 0$ et $p_{|\Gamma_i} = a_i$ où les a_i sont des constantes réelles arbitraires pour $i = 0, \ldots, m$. On introduit aussi S et S_0 les sous-espaces de $H^{-1}(\Omega)^d$ tels que:

$$S = \{u \in H^{-1}(\Omega)^d,\ \mathrm{div}\ u = 0\} \tag{3.2}$$

$$S_0 = \{u \in S,\ \forall p \in B,\ (u, \nabla p) = 0\}. \tag{3.3}$$

S est l'espace des distributions solenoïdales de $H^{-1}(\Omega)^d$, et si on pouvait définir la trace normale sur Γ des distributions de S, les distributions de S appartenant à S_0 seraient celles pour lesquelles on aurait formellement:

$$(3.4) \qquad \forall i = 0, \dots, m, \qquad (u \cdot n, 1_{|\Gamma_i}) = 0$$

où $1_{|\Gamma_i}$ est la fonction indicatrice de Γ_i.

S_0 est un sous-espace fermé de S de codimension m. On peut aussi montrer que S_0 est l'image de $L^2(\Omega)^d$ par le rotationnel lorsque $d = 2$ ou 3.

Afin d'énoncer le résultat essentiel de cette section introduisons $\mathscr{V}$ le sous-espace de $\mathscr{D}(\Omega)^d$ composé des fonctions solenoïdales. On a alors le résultat de densité suivant:

Théorème 3.1. *$\mathscr{V}$ est dense dans S_0 équipé de la norme de $H^{-1}(\Omega)^d$.*

Démonstration. Soit f une forme linéaire continue sur S_0. Supposons que f s'annule sur $\mathscr{V}$, montrons alors que f s'annule sur S_0; un corollaire bien connu du théorème de Hahn–Banach permettra de conclure.

S_0 étant un sous-espace de $H^{-1}(\Omega)^d$, on étend f à $H^{-1}(\Omega)^d$ à l'aide du théorème de Hahn-Banach; soit $\tilde{f}$ une des extensions possibles. $H^{-1}(\Omega)^d$ étant réflexif on identifie $\tilde{f}$ à une fonction de $H_0^1(\Omega)^d$. Puisque f s'annule sur $\mathscr{V} \subset S_0$ il en est de même pour $\tilde{f}$; d'après le théorème de De Rham [4] il en résulte que $\tilde{f}$ est nécessairement le gradient d'une distribution, c'est à dire:

$$\exists p \in \mathscr{D}(\Omega)', \qquad \tilde{f} = \nabla p$$

Or $\tilde{f}$ est dans $H_0^1(\Omega)^d$ donc $\nabla p \in H_0^1(\Omega)^d$. D'après l'inégalité (cf. Girault-Raviart [2, p. 20]):

$$|p|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c|\nabla p|_{-1}$$

et la continuité de l'injection de $H_0^1(\Omega)^d$ dans $H^{-1}(\Omega)^d$, on déduit $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. C'est-à-dire $p \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ et finalement $p \in B$, ce qui donne

$$\forall u \in S_0, \qquad (u, f) = (u, \tilde{f}) = (u, \nabla p) = 0,$$

d'où la conclusion. □

De ce théorème on déduit facilement la densité de V et H dans S_0 (voir Simon [7] pour d'autres conséquences de ce théorème de densité sur les équivalences entre solutions fortes et faibles des équations de Navier-Stokes).

4. Un contre-exemple – Conclusions

Pour démontrer que (1.11) est faux il suffit de démontrer la contraposée:

Théorème 4.1. *Il existe une suite (u_k) d'éléments de H telle que*

$$(4.1) \qquad |u_k|_{-1}^2 \geq k(u_k, A^{-1}u_k)$$

Démonstration. Soit $\Phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial n}_{|\Gamma_i} = g_i \end{cases}$$

avec $\int_{\Gamma_i} g_i = 0$ pour $i = 0, \dots, m$. Pour chaque choix des (g_i) ce problème admet une solution unique. Par définition, $\nabla \Phi$ appartient à S, de plus on a

$$\forall q \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla\Phi.\nabla q = \int_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n} q = \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} q g_i$$

En particulier pour tout $q \in B$ on a $q_{|\Gamma_i} = a_i$ (les a_i étant des constantes), d'où

$$\forall q \in B, \qquad (\nabla\Phi, \nabla q) = 0.$$

Posons $u = \nabla\Phi$, u appartient manifestement à S_0 d'après ce qui précède. D'après le Théorème de densité 3.1 il existe une suite (u_k) d'éléments de $\mathscr{V} \subset H$ telle que $u_k \to u$ dans $H^{-1}(\Omega)^d$. Plus précisément, on peut choisir la suite de telle sorte que pour $k \geq 1$:

$$|u - u_k|_{-1} \leq \frac{|u|_{-1}}{k}$$

Soit $v_k \in D(A)$ et $p_k \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ les solutions du problème de Stokes:

$$\begin{cases} -\nabla^2 v_k + \nabla p_k &= u_k \\ \operatorname{div} v_k &= 0 \end{cases}$$

Par definition de l'opérateur de Stokes on a $v_k = A^{-1}u_k$. D'autre part on a:

$$\begin{cases} -\nabla^2 v_k + \nabla(p_k - \Phi) &= u_k - u \\ \operatorname{div} v_k &= 0 \end{cases}$$

d'où les estimations:

$$\begin{cases} |p_k - \Phi|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c|u_k - u|_{-1} \leq \frac{c}{k}|u|_{-1} \\ |v_k|_1 \leq c|u_k - u|_{-1} \leq \frac{c}{k}|u|_{-1} \end{cases}$$

La seconde série d'estimations conduit à

$$(u_k, A^{-1}u_k) = (u_k, v_k) \leq |u_k|_{-1}|v_k|_1 \leq \frac{c}{k}|u_k|_{-1}|u|_{-1} \leq \frac{c'}{k}|u_k|_{-1}^2$$

ce qui établit le résultat modulo des constantes près. $\square$

Ce résultat est a priori un peu surprenant, il montre l'existence de potentiels (i.e. les fonctions Φ) dont on peut approcher le gradient dans $H^{-1}(\Omega)^d$ par des fonctions de H, (ie. des fonctions à divergence nulle et de trace normale nulle au bord). L'intuition voudrait que le gradient en question satisfasse à la limite un problème de Neumann homogène dont l'unique solution est zéro modulo les constantes. En réalité l'approximation ayant lieu dans $H^{-1}(\Omega)^d$, la condition limite de Neumann n'a pas de sens. Autrement dit, les fonctions de H convergent vers $\nabla\Phi$ en développant une couche limite au bord.

En conclusion, la question concernant la possibilité d'un taux de convergence théorique de la pression d'ordre plus élevé que $O(\delta t^{1/2})$ reste ouverte. Sous réserve que l'erreur sur la pression est effectivement contrôlée uniquement par (2.5), alors une convergence d'ordre 1 ou plus de la vitesse $(\tilde{u}_k)$ dans $H^1(\Omega)^d$ ne peut conduire qu'à une convergence d'ordre $1/2$ sur la pression. Un taux de convergence plus élevé sur la pression requière une convergence de la vitesse dans un espace plus régulier que $H^1(\Omega)^d$, c'est à dire dans $\nabla^{-2}(H_0^{\mathrm{div}}(\Omega)')$. En fait, une convergence d'ordre 1 de $\nabla^2\tilde{e}_{k+1}$ en norme $L^2(\Omega)^d$ serait suffisante.

Remerciements. L'auteur tient à remercier Mmes C. Bernardi et V. Girault pour leurs conseils et pour l'attention qu'elles ont bien voulu lui accorder.

Références

1. Chorin, A. (1968): Numerical simulation of the Navier–Stokes equations. Math. Comp. **22**, 745–762
2. Girault, V., Raviart, P.A. (1986): Finite element methods for Navier–Stokes equation. Springer Series Comput. Math., Vol. 5, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
3. Lions, J.L., Magenes, E. (1968): Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, Paris
4. De Rham, G. (1960): Variétés différentiables. Hermann, Paris
5. Shen, J. (1992): On error estimates of projection methods for Navier–Stokes equation: first-order schemes. SIAM J. Numer. Anal. **29** (1), 57–77
6. Shen, J. (1992): On error estimates of some higher projection methods and penalty-projection methods for Navier–Stokes equation. Numer. Math. **62**, 49–73
7. Simon J. (1988): Equations fortes vérifiées par les solutions faibles des équations de Navier–Stokes. Mémoire de soutenance d'Habilitation, Univ. Paris VI, Paris
8. Temam, R. (1977): Navier–Stokes equations. Studies Math. Appl., Vol. 2, North Holland
9. Temam, R. (1968): Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes. Bull. Soc. Math. France **98**, 115–152
10. Temam, R. (1991): Remark on the pressure boundary condition for the projection method. Theor. Comput. Fluid Dynam. **3**, 181–184

Note added in proof. Depuis la soumission de cet article, J. Shen et l'auteur ont obtenu des estimations d'ordre 1 sur la pression par d'autres techniques et en demandant plus de régularité sur la solution.

This article was processed by the author using the LaTeX style file *pljour1* from Springer-Verlag.