

Introdução aos métodos de decomposição de domínio

Juan Galvis

Texas A&M University

2009

Notação

- ▶ $D \subset \mathbb{R}^2$, domínio poligonal conexo
- ▶ \mathcal{T}^h , triangulação com parâmetro $h > 0$ e elementos $\{K\}_{i=1}^{N_h^e}$.
- ▶ \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x), & \text{para } x \in D \\ u(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial D \end{cases}$$

Notação

- ▶ $D \subset \mathbb{R}^2$, domínio poligonal conexo
- ▶ \mathcal{T}^h , triangulação com parâmetro $h > 0$ e elementos $\{K\}_{i=1}^{N_h^e}$.
- ▶ \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x), & \text{para } x \in D \\ u(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial D \end{cases}$$

Notação

- ▶ $D \subset \mathbb{R}^2$, domínio poligonal conexo
- ▶ \mathcal{T}^h , triangulação com parâmetro $h > 0$ e elementos $\{K\}_{i=1}^{N_h^e}$.
- ▶ \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x), & \text{para } x \in D \\ u(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial D \end{cases}$$

Notação

- ▶ $D \subset \mathbb{R}^2$, domínio poligonal conexo
- ▶ \mathcal{T}^h , triangulação com parâmetro $h > 0$ e elementos $\{K\}_{i=1}^{N_h^e}$.
- ▶ \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

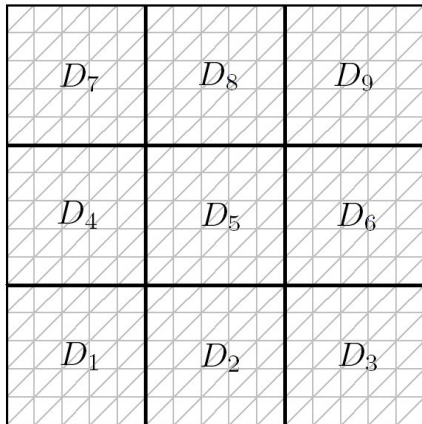
- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x), & \text{para } x \in D \\ u(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial D \end{cases}$$

Decomposição sem sobreposição

- ▶ partição do domínio em subdomínios poligonais disjuntos

$$\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{N_S} \overline{D}_i = \overline{D}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, for $i \neq j$.
- ▶ $H_i = \text{Diâmetro de } D_i$



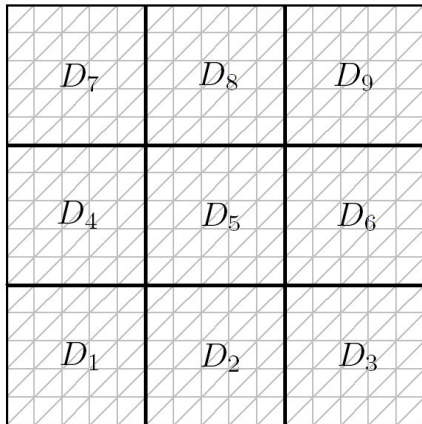
Decomposição sem sobreposição

- ▶ partição do domínio em subdomínios poligonais disjuntos

$$\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{N_S} \overline{D}_i = \overline{D}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, for $i \neq j$.

- ▶ $H_i = \text{Diâmetro de } D_i$



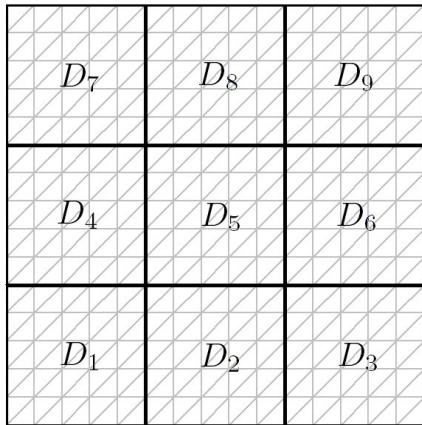
Decomposição sem sobreposição

- ▶ partição do domínio em subdomínios poligonais disjuntos

$$\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$$

- ▶ $\bigcup_{i=1}^{N_S} \overline{D}_i = \overline{D}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, for $i \neq j$.

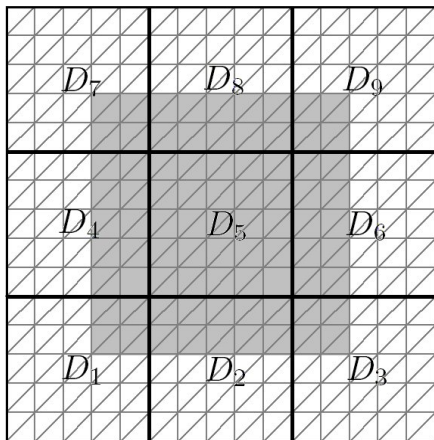
- ▶ $H_i = \text{Diâmetro de } D_i$



Decomposição sem sobreposição

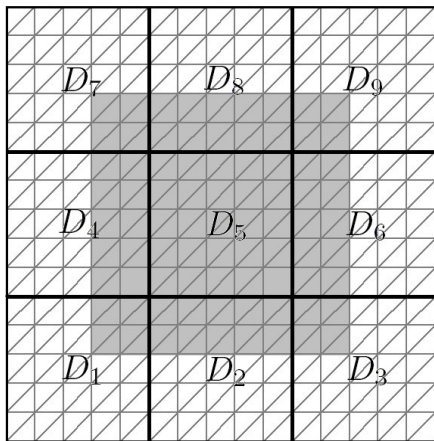
► sobreposição δ

► $D'_i = \{x \in D : d(x, y) < \delta, \text{ para algum } y \in D\}$



Decomposição sem sobreposição

- ▶ sobreposição δ
- ▶ $D'_i = \{x \in D : d(x, y) < \delta, \text{ para algum } y \in D\}$



Ingredientes principais

1. os espaços locais
2. operadores de restrição e extensão
3. matriz local
4. um (ou até vários) espaço(s) grosso(s).

Ingredientes principais

1. os espaços locais
2. operadores de restrição e extensão
3. matriz local
4. um (ou até vários) espaço(s) grosso(s).

Ingredientes principais

1. os espaços locais
2. operadores de restrição e extensão
3. **matriz local**
4. um (ou até vários) espaço(s) grosso(s).

Ingredientes principais

1. os espaços locais
2. operadores de restrição e extensão
3. matriz local
4. um (ou ate vários) espaço(s) grosso(s).

Espaços global e locais

- ▶ Espaço global $V := \mathbb{P}_0^1(\mathcal{T}^h)$.
- ▶ Espaços locais:

$$V^{(i)} = V^{(i)}(D'_i) = \mathbb{P}_0^1(D'_i) = \text{span}\{\phi_i; x_i \in D'_i\}, \quad (1)$$

Espaços global e locais

- ▶ Espaço global $V := \mathbb{P}_0^1(\mathcal{T}^h)$.
- ▶ Espaços locais:

$$V^{(i)} = V^{(i)}(D'_i) = \mathbb{P}_0^1(D'_i) = \text{span}\{\phi_i; x_i \in D'_i\}, \quad (1)$$

Matrizes de restrição

- ▶ $R^{(i)}$ de dimensão $N_h^{(i),I} \times N_h^v$ com entradas zeros e um.
- ▶ Indica se um vértice pertence o não ao subdomínio.
- ▶ $R^{(i)T}$ é extensão por zero afora do D

Dado $v \in V$ com representação vetorial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_v^h}$.

- ▶ A sua restrição ao subdomínio D'_i tem representação vetorial $R^{(i)}\mathbf{v}$.

Dado $v^{(i)} \in V^{(i)}$ com representação $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_v^{(i)}}$

- ▶ A sua extensão (por zero) para o D tem representação vetorial $R^{(i)T}\mathbf{v}^{(i)}$.

Matrizes de restrição

- ▶ $R^{(i)}$ de dimensão $N_h^{(i),I} \times N_h^v$ com entradas zeros e um.
- ▶ Indica se um vértice pertence o não ao subdomínio.
- ▶ $R^{(i)T}$ é extensão por zero afora do D

Dado $v \in V$ com representação vetorial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_v^h}$.

- ▶ A sua restrição ao subdomínio D'_i tem representação vetorial $R^{(i)}\mathbf{v}$.

Dado $v^{(i)} \in V^{(i)}$ com representação $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_v^{(i)}}$

- ▶ A sua extensão (por zero) para o D tem representação vetorial $R^{(i)T}\mathbf{v}^{(i)}$.

Matrizes de restrição

- ▶ $R^{(i)}$ de dimensão $N_h^{(i),I} \times N_h^v$ com entradas zeros e um.
- ▶ Indica se um vértice pertence o não ao subdomínio.
- ▶ $R^{(i)T}$ é extensão por zero afora do D

Dado $v \in V$ com representação vetorial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_v^h}$.

- ▶ A sua restrição ao subdomínio D'_i tem representação vetorial $R^{(i)}\mathbf{v}$.

Dado $v^{(i)} \in V^{(i)}$ com representação $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_v^{(i)}}$

- ▶ A sua extensão (por zero) para o D tem representação vetorial $R^{(i)T}\mathbf{v}^{(i)}$.

Matrizes de restrição

- ▶ $R^{(i)}$ de dimensão $N_h^{(i),I} \times N_h^v$ com entradas zeros e um.
- ▶ Indica se um vértice pertence o não ao subdomínio.
- ▶ $R^{(i)T}$ é extensão por zero afora do D

Dado $v \in V$ com representação vetorial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_v^h}$.

- ▶ A sua restrição ao subdomínio D'_i tem representação vetorial $R^{(i)}\mathbf{v}$.

Dado $v^{(i)} \in V^{(i)}$ com representação $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_v^{(i)}}$

- ▶ A sua extensão (por zero) para o D tem representação vetorial $R^{(i)T}\mathbf{v}^{(i)}$.

Matrizes de restrição

- ▶ $R^{(i)}$ de dimensão $N_h^{(i),I} \times N_h^v$ com entradas zeros e um.
- ▶ Indica se um vértice pertence o não ao subdomínio.
- ▶ $R^{(i)T}$ é extensão por zero afora do D

Dado $v \in V$ com representação vetorial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_v^h}$.

- ▶ A sua restrição ao subdomínio D'_i tem representação vetorial $R^{(i)}\mathbf{v}$.

Dado $v^{(i)} \in V^{(i)}$ com representação $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_v^{(i)}}$

- ▶ A sua extensão (por zero) para o D tem representação vetorial $R^{(i)T}\mathbf{v}^{(i)}$.

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local

$$\mathcal{A}^{(i)}(u, v) = \int_{D'_i} \mathcal{A}^{(i)}(u, v) dx, \quad \forall u, v \in V^{(i)}$$

$$\mathcal{A}^{(i)}(u, v) = \mathcal{A}^{(i)}(u, v) = (\mathcal{A}^{(i)}(u, v))_{D'_i}$$

$$\mathcal{A}^{(i)}(u, v) = \mathcal{A}^{(i)}(u, v)$$

o $\mathcal{A}^{(i)}$ tem uma desigualdade estrita δ sempre que u e v são ortogonais em relação aos vetores internos do subdomínio D'_i .

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local

$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \int_{D'_i} \kappa(x) u'_i(x) v'_i(x) dx, \quad u_i, v_i \in V^{(i)}. \quad (2)$$

$$\mathcal{A}(u, v) = \sum_{i=1}^N \mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = (\mathcal{A}^{(1)}, \dots, \mathcal{A}^{(N)})$$

$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i)$$

Seja $\mathcal{A}^{(i)}$ uma forma bilinear local definida em $V^{(i)}$ e seja \mathcal{A} a forma bilinear global definida em V por

$$\mathcal{A}(u, v) = \sum_{i=1}^N \mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i)$$

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local

$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \int_{D'_i} \kappa(x) u'_i(x) v'_i(x) dx, \quad u_i, v_i \in V^{(i)}. \quad (2)$$

$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \mathcal{A}(R^{(i)T} u_i, R^{(i)T} v_i) = (R^{(i)T} u_i)^T A (R^{(i)T} v_i)$$

$$A^{(i)} = R^{(i)} A R^{(i)T}. \quad (3)$$

- ▶ $A^{(i)}$ é o bloco diagonal da matriz A correspondente aos índices associados aos vértices interiores ao subdomínio D'_i .

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \int_{D'_i} \kappa(x) u'_i(x) v'_i(x) dx, \quad u_i, v_i \in V^{(i)}. \quad (2)$$



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \mathcal{A}(R^{(i)T} u_i, R^{(i)T} v_i) = (R^{(i)T} u_i)^T A (R^{(i)T} v_i)$$



$$A^{(i)} = R^{(i)} A R^{(i)T}. \quad (3)$$

- ▶ $A^{(i)}$ é o bloco diagonal da matriz A correspondente aos índices associados aos vértices interiores ao subdomínio D'_i .

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \int_{D'_i} \kappa(x) u'_i(x) v'_i(x) dx, \quad u_i, v_i \in V^{(i)}. \quad (2)$$



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \mathcal{A}(R^{(i)T} u_i, R^{(i)T} v_i) = (R^{(i)T} \mathbf{u}_i)^T A (R^{(i)T} \mathbf{v}_i)$$



$$A^{(i)} = R^{(i)} A R^{(i)T}. \quad (3)$$

- ▶ $A^{(i)}$ é o bloco diagonal da matriz A correspondente aos índices associados aos vértices interiores ao subdomínio D'_i .

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \int_{D'_i} \kappa(x) u'_i(x) v'_i(x) dx, \quad u_i, v_i \in V^{(i)}. \quad (2)$$



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \mathcal{A}(R^{(i)T} u_i, R^{(i)T} v_i) = (R^{(i)T} \mathbf{u}_i)^T A (R^{(i)T} \mathbf{v}_i)$$



$$A^{(i)} = R^{(i)} A R^{(i)T}. \quad (3)$$

- ▶ $A^{(i)}$ é o bloco diagonal da matriz A correspondente aos índices associados aos vértices interiores ao subdomínio D'_i .

Formas bilineares locais

- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma equação diferencial para ser resolvida neste subdomínio, ou melhor dito,
- ▶ Para cada D'_i escolhemos uma forma bilinear local $\mathcal{A}^{(i)}$
- ▶ “Solver” exato: a forma bilinear global restrita ao espaço local



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \int_{D'_i} \kappa(x) u'_i(x) v'_i(x) dx, \quad u_i, v_i \in V^{(i)}. \quad (2)$$



$$\mathcal{A}^{(i)}(u_i, v_i) = \mathcal{A}(R^{(i)T} u_i, R^{(i)T} v_i) = (R^{(i)T} \mathbf{u}_i)^T A (R^{(i)T} \mathbf{v}_i)$$



$$A^{(i)} = R^{(i)} A R^{(i)T}. \quad (3)$$

- ▶ $A^{(i)}$ é o bloco diagonal da matriz A correspondente aos índices associados aos vértices interiores ao subdomínio D'_i .

Precondicionador aditivo de um nível

- ▶ $R^{(i)}$, restrição ao subdomínio
- ▶ $A^{(i)}$, matriz local (edp no subdomínio)

Precondicionador aditivo de um nível:

$$M_1^{-1} = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} \left[A^{(i)} \right]^{-1} R^{(i)}. \quad (4)$$

Precondicionador aditivo de um nível

- ▶ $R^{(i)}$, restrição ao subdomínio
- ▶ $A^{(i)}$, matriz local (edp no subdomínio)

Precondicionador aditivo de um nível:

$$M_1^{-1} = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} \left[A^{(i)} \right]^{-1} R^{(i)}. \quad (4)$$

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q =$$

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q =$$

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

3. Esta soma pode ser calculada em paralelo.

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

3. Esta soma pode ser calculada em paralelo.
4. Para calcular a i -ésima parcela $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$, resolvemos o sistema linear local

$$A^{(i)} u_i = R^{(i)} q.$$

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

3. Esta soma pode ser calculada em **paralelo**.
4. Para calcular a i -ésima parcela $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$, **resolvemos** o sistema linear local

$$A^{(i)} u_i = R^{(i)} q.$$

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

3. Esta soma pode ser calculada em **paralelo**.
4. Para calcular a i -ésima parcela $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$, **resolvemos** o sistema linear local

$$A^{(i)} u_i = R^{(i)} q.$$

Calculando $M_1^{-1}q$

- ▶ precisamos da definição das matrizes locais e das matrizes de restrição e extensão.

Para usar o M_1^{-1} no método do gradiente conjugado preconditionado precisamos

1. dado q , precisamos poder calcular $M_1^{-1}q$
- 2.

$$M_1^{-1}q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde definimos $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$.

3. Esta soma pode ser calculada em **paralelo**.
4. Para calcular a i -ésima parcela $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$, **resolvemos** o sistema linear local

$$A^{(i)} u_i = R^{(i)} q.$$

Theorem

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) \leq C \left(1 + \frac{1}{\delta H}\right)$$

!

Theorem

Suponha que a malha \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme. Considere o preconditionador M_1^{-1} definido em (4). A matriz A é a matriz da forma bilinear com coeficiente κ elíptico. Temos que existe uma constante C independente h e de H tal que

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) \leq C \left(1 + \frac{1}{\delta H}\right)$$

onde $H = \max_{1 \leq i \leq N_s} \text{diâmetro}(D_i)$ e δ é o parâmetro da decomposição com superposição $\{D'_i\}$. A constante C pode depender do contraste do coeficiente κ .

Theorem

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) \leq C \left(1 + \frac{1}{\delta H}\right)$$

!

Theorem

Suponha que a malha \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme. Considere o preconditionador M_1^{-1} definido em (4). A matriz A é a matriz da forma bilinear com coeficiente κ elíptico. Temos que existe uma constante C independente h e de H tal que

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) \leq C \left(1 + \frac{1}{\delta H}\right)$$

onde $H = \max_{1 \leq i \leq N_s} \text{diâmetro}(D_i)$ e δ é o parâmetro da decomposição com superposição $\{D'_i\}$. A constante C pode depender do contraste do coeficiente κ .

Theorem

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) \leq C \left(1 + \frac{1}{\delta H}\right)$$

!

Theorem

Suponha que a malha \mathcal{T}^h é conforme e quase-uniforme. Considere o preconditionador M_1^{-1} definido em (4). A matriz A é a matriz da forma bilinear com coeficiente κ elíptico. Temos que existe uma constante C independente h e de H tal que

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) \leq C \left(1 + \frac{1}{\delta H}\right)$$

onde $H = \max_{1 \leq i \leq N_s} \text{diâmetro}(D_i)$ e δ é o parâmetro da decomposição com superposição $\{D'_i\}$. A constante C pode depender do contraste do coeficiente κ .

Experimentos numéricos

- A equação de Laplace $\Delta u = -1$ em $D = (0, 1) \times (0, 1)$ com $u = 0$ no bordo do D .

$n \backslash N$	2	4	8	16
2	1 (1.00)	7 (4.27)	9 (13.61)	15 (51.56)
4	1 (1.00)	7 (4.13)	9 (13.05)	15 (49.35)
8	1 (1.00)	7 (4.09)	10 (12.87)	15 (48.66)
16	1 (1.00)	8 (4.07)	10 (12.81)	16 (48.44)

Tabela: Número de iterações do gradiente conjugado preconditionado e em parênteses estimativa do número de condição). Aqui $h = 1/(nN)$ e $H = 1/N$ e o fixamos $\delta = nh = H$.

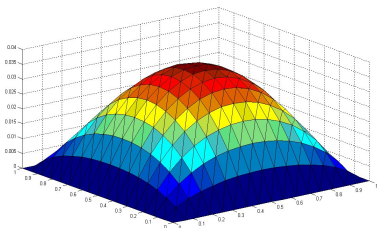
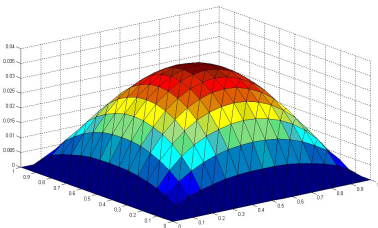
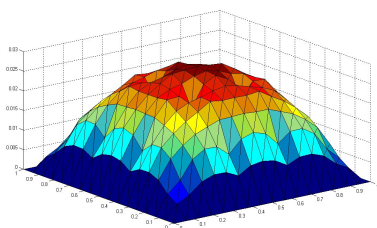
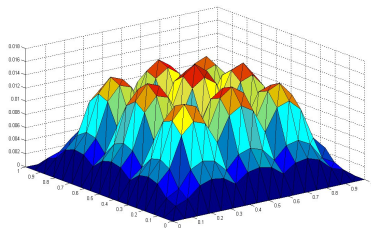
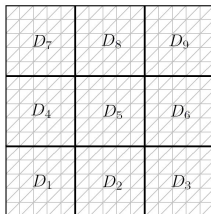


Figura: i -ésima iteração do método, $i = 1, 2, 4, 8$ (de esquerda para direita e de cima para baixo). Neste exemplo $n = N = 4$. Observe que u_8 é a solução com tolerância de 10^{-6} .

Precondicionador de dois níveis: malha grossa

► Temos

- Malha fina \mathcal{T}^h do D
 - Decomposição $\{D'_i\}$ do D
 - Problemas locais, operadores de restrição e extensão.
- introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)
- \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.



Precondicionador de dois níveis: malha grossa

- ▶ Temos

- ▶ Malha fina \mathcal{T}^h do D

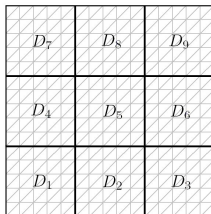
- ▶ Decomposição $\{D'_i\}$ do D

- ▶ Problemas locais, operadores de restrição e extensão.

- ▶ introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)

- ▶ \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.

- ▶ Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.



Precondicionador de dois níveis: malha grossa

- ▶ Temos

- ▶ Malha fina \mathcal{T}^h do D

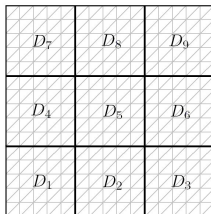
- ▶ **Decomposição $\{D'_i\}$ do D**

- ▶ Problemas locais, operadores de restrição e extensão.

- ▶ introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)

- ▶ \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.

- ▶ Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.

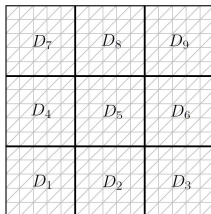


Precondicionador de dois níveis: malha grossa

- ▶ Temos

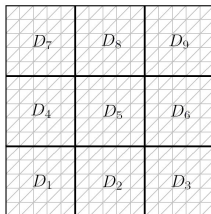
- ▶ Malha fina \mathcal{T}^h do D
- ▶ Decomposição $\{D'_i\}$ do D
- ▶ Problemas locais, operadores de restrição e extensão.

- ▶ introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)
- ▶ \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.



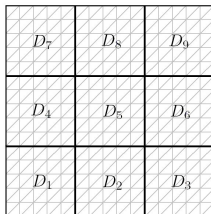
Precondicionador de dois níveis: malha grossa

- ▶ Temos
 - ▶ Malha fina \mathcal{T}^h do D
 - ▶ Decomposição $\{D'_i\}$ do D
 - ▶ Problemas locais, operadores de restrição e extensão.
- ▶ **introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)**
- ▶ \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.



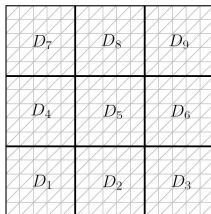
Precondicionador de dois níveis: malha grossa

- ▶ Temos
 - ▶ Malha fina \mathcal{T}^h do D
 - ▶ Decomposição $\{D'_i\}$ do D
 - ▶ Problemas locais, operadores de restrição e extensão.
- ▶ introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)
- ▶ \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.



Precondicionador de dois níveis: malha grossa

- ▶ Temos
 - ▶ Malha fina \mathcal{T}^h do D
 - ▶ Decomposição $\{D'_i\}$ do D
 - ▶ Problemas locais, operadores de restrição e extensão.
- ▶ introduzimos uma triangulação grossa \mathcal{T}^H adicional ($H > h$)
- ▶ \mathcal{T}^h pode ser independente de \mathcal{T}^H , $\{D_i\}_{i=1}^{N_S}$ e $\{D'_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ Assumimos que triangulação grossa é dada por $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.



Problema grosso



$$V^H = \text{span}\{\Phi_j \in V^h : j = 0, 1, \dots, N_H^v\}$$

- ▶ V^H é gerado por poucas funções.
- ▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \Phi_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

- ▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever com as funções da malha fina,

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \Phi_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

Problema grosso



$$V^H = \text{span}\{\Phi_j \in V^h : j = 0, 1, \dots, N_H^v\}$$

▶ V^H é gerado por poucas funções.

▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \Phi_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever com as funções da malha fina,

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \Phi_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

Problema grosso



$$V^H = \text{span}\{\Phi_j \in V^h : j = 0, 1, \dots, N_H^v\}$$

▶ V^H é gerado por poucas funções.

▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \Phi_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever com as funções da malha fina,

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \Phi_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

Problema grosso



$$V^H = \text{span}\{\Phi_j \in V^h : j = 0, 1, \dots, N_H^v\}$$

▶ V^H é gerado por poucas funções.

▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Phi}_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

▶ Como $\Phi_j \in V^h$ pode-se escrever com as funções da malha fina,

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{N_h^v} \Phi_j(x_i) \phi_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Phi}_j = [\Phi_j(x_1), \dots, \Phi_j(x_{N_h^v})]^T$$

Matriz e forma bilinear grossa



$$R^{(0)T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_H^v}]$$



$$A^{(0)} = R^{(0)} A R^{(0)T}. \quad (5)$$



$$\mathcal{A}^{(0)}(u_0, v_0) = \mathcal{A}(R^{(0)T} u_0, R^{(0)T} v_0). \quad (6)$$

- ▶ Concluimos que $A^{(0)}$ é a representação matricial da forma bilinear $\mathcal{A}^{(0)}$ definida como a restrição da forma bilinear \mathcal{A} ao subespaço $V^{(0)} \subset V$,

Matriz e forma bilinear grossa



$$R^{(0)T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_H^v}]$$



$$A^{(0)} = R^{(0)} A R^{(0)T}. \quad (5)$$



$$\mathcal{A}^{(0)}(u_0, v_0) = \mathcal{A}(R^{(0)T} u_0, R^{(0)T} v_0). \quad (6)$$

- ▶ Concluimos que $A^{(0)}$ é a representação matricial da forma bilinear $\mathcal{A}^{(0)}$ definida como a restrição da forma bilinear \mathcal{A} ao subespaço $V^{(0)} \subset V$,

Matriz e forma bilinear grossa



$$R^{(0)T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_H^v}]$$



$$A^{(0)} = R^{(0)} A R^{(0)T}. \quad (5)$$



$$\mathcal{A}^{(0)}(u_0, v_0) = \mathcal{A}(R^{(0)T} u_0, R^{(0)T} v_0). \quad (6)$$

- Concluimos que $A^{(0)}$ é a representação matricial da forma bilinear $\mathcal{A}^{(0)}$ definida como a restrição da forma bilinear \mathcal{A} ao subespaço $V^{(0)} \subset V$,

Matriz e forma bilinear grossa



$$R^{(0)T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_H^v}]$$



$$A^{(0)} = R^{(0)} A R^{(0)T}. \quad (5)$$



$$\mathcal{A}^{(0)}(u_0, v_0) = \mathcal{A}(R^{(0)T} u_0, R^{(0)T} v_0). \quad (6)$$

- ▶ Concluimos que $A^{(0)}$ é a representação matricial da forma bilinear $\mathcal{A}^{(0)}$ definida como a restrição da forma bilinear \mathcal{A} ao subespaço $V^{(0)} \subset V$,

Precondicionador aditivo de dois níveis

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} \quad (7) \\ &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + M_1^{-1}, \end{aligned}$$

Para calcular $M_2^{-1}q$,

$$M_2^{-1}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q, i=0, \dots, N_S$.

Para calcular u_i é necessário:

1. Resolver

2. Calcular $u_i = R^{(i)T} v_i$

Precondicionador aditivo de dois níveis

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} \quad (7) \\ &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + M_1^{-1}, \end{aligned}$$

Para calcular $M_2^{-1}q$,

$$M_2^{-1}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q, i=0, \dots, N_S$.

Para calcular u_i é necessário resolver

$$A^{(i)} u_i = R^{(i)} q$$

Precondicionador aditivo de dois níveis

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} \quad (7) \\ &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + M_1^{-1}, \end{aligned}$$

Para calcular $M_2^{-1}q$,

1.

$$M_2^{-1}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)}q$, $i = 0, 1, \dots, N_S$.

Precondicionador aditivo de dois níveis

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} \quad (7) \\ &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + M_1^{-1}, \end{aligned}$$

Para calcular $M_2^{-1}q$,

1.

$$M_2^{-1}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$, $i = 0, 1, \dots, N_S$.

2. Para calcular a 0-ésima parcela $u_0 = [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} q$ resolvemos o sistema linear

$$A^{(0)} u_0 = R^{(0)} q$$

Precondicionador aditivo de dois níveis

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} \quad (7) \\ &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + M_1^{-1}, \end{aligned}$$

Para calcular $M_2^{-1}q$,

1.

$$M_2^{-1}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} q$, $i = 0, 1, \dots, N_S$.

2. Para calcular a 0-ésima parcela $u_0 = [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} q$ resolvemos o sistema linear

$$A^{(0)} u_0 = R^{(0)} q$$

Precondicionador aditivo de dois níveis

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + \sum_{i=1}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)} \quad (7) \\ &= R^{(0)T} [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)} + M_1^{-1}, \end{aligned}$$

Para calcular $M_2^{-1}q$,

1.

$$M_2^{-1}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)}q = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} u_i$$

onde $u_i = [A^{(i)}]^{-1} R^{(i)}q$, $i = 0, 1, \dots, N_S$.

2. Para calcular a 0-ésima parcela $u_0 = [A^{(0)}]^{-1} R^{(0)}q$ resolvemos o sistema linear

$$A^{(0)}u_0 = R^{(0)}q$$

Espaços grossos

1. Diminuir a dependência no número de subdomínios
2. Diminuir a dependência no contraste do meio
3. Precisa ser construído uma vez.
 - ▶ Funções base lineares por partes na malha grossa
 - ▶ Funções de elementos finitos multi-escala
 - ▶ ...

Espaços grossos

1. Diminuir a dependência no numero de subdomínios
2. Diminuir a dependência no contraste do meio
3. Precisa ser construído uma vez.
 - ▶ Funções base lineares por partes na malha grossa
 - ▶ Funções de elementos finitos multi-escala
 - ▶ ...

Espaços grossos

1. Diminuir a dependência no numero de subdomínios
2. Diminuir a dependência no contraste do meio
3. **Precisa ser construído uma vez.**
 - ▶ Funções base lineares por partes na malha grossa
 - ▶ Funções de elementos finitos multi-escala
 - ▶ ...

Espaços grossos

1. Diminuir a dependência no número de subdomínios
 2. Diminuir a dependência no contraste do meio
 3. Precisa ser construído uma vez.
- ▶ Funções base lineares por partes na malha grossa
 - ▶ Funções de elementos finitos multi-escala
 - ▶ ...

Espaços grossos

1. Diminuir a dependência no número de subdomínios
 2. Diminuir a dependência no contraste do meio
 3. Precisa ser construído uma vez.
- ▶ Funções base lineares por partes na malha grossa
 - ▶ Funções de elementos finitos multi-escala
 - ▶ ...

Espaços grossos

1. Diminuir a dependência no numero de subdomínios
2. Diminuir a dependência no contraste do meio
3. Precisa ser construído uma vez.
 - ▶ Funções base lineares por partes na malha grossa
 - ▶ Funções de elementos finitos multi-escala
 - ▶ ...

Funções base lineares por partes na malha grossa

- ▶ $\{\Phi_j\}$ como sendo as função base chapéu na malha grossa
 $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ baixo custo computacional
- ▶ Uma função por vértice da malha grossa.

Funções base lineares por partes na malha grossa

- ▶ $\{\Phi_j\}$ como sendo as função base chapéu na malha grossa
 $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ **baixo custo computacional**
- ▶ Uma função por vértice da malha grossa.

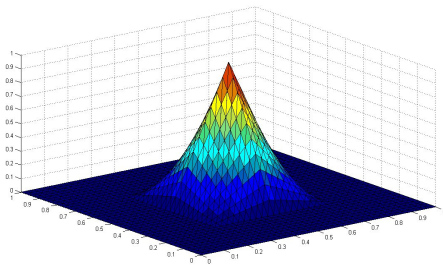
Funções base lineares por partes na malha grossa

- ▶ $\{\Phi_j\}$ como sendo as função base chapéu na malha grossa
 $\mathcal{T}^H = \{D_i\}_{i=1}^{N_S}$.
- ▶ baixo custo computacional
- ▶ Uma função por vértice da malha grossa.

Funções base lineares em retângulos

- ▶ e para os elementos retangulares,

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y_j, \\ 0, & \text{se } x = y_k, k \neq j, \\ \text{pol. grau um em} & \text{se } x \text{ não é vértice de } \mathcal{T}^H. \\ \text{cada variável,} & \end{cases}$$



Funções de elementos finitos multi-escala

- ▶ Funções que em cada elemento da malha grossa são solução da (ou de uma) equação diferencial

- ▶ *extensão harmônica* Φ_j^{MS} definida por

$$\Phi_j^{MS}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y_j, \\ 0, & \text{se } x = y_k, k \neq j, \\ \text{extensão} & \text{se } x \text{ pertence as arestas} \\ \text{LINEAR,} & \text{de algum elemento.} \\ \\ \text{extensão} & \text{se } x \in K \text{ é ponto interior} \\ \text{harmônica,} & \text{de algum elemento } \mathcal{T}^H. \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Dependem do κ . Melhor na presença de contraste alto

Funções de elementos finitos multi-escala

- ▶ Funções que em cada elemento da malha grossa são solução da (ou de uma) equação diferencial
- ▶ *extensão harmônica* Φ_j^{MS} definida por

$$\Phi_j^{MS}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y_j, \\ 0, & \text{se } x = y_k, k \neq j, \\ \text{extensão} & \text{se } x \text{ pertence as arestas} \\ \text{LINEAR,} & \text{de algum elemento.} \\ \\ \text{extensão} & \text{se } x \in K \text{ é ponto interior} \\ \text{harmônica,} & \text{de algum elemento } \mathcal{T}^H. \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Dependem do κ . Melhor na presença de contraste alto

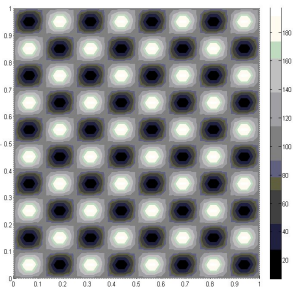
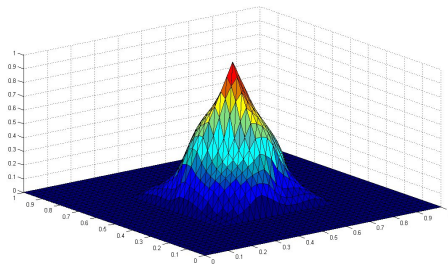
Funções de elementos finitos multi-escala

- ▶ Funções que em cada elemento da malha grossa são solução da (ou de uma) equação diferencial
- ▶ *extensão harmônica* Φ_j^{MS} definida por

$$\Phi_j^{MS}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y_j, \\ 0, & \text{se } x = y_k, k \neq j, \\ \text{extensão} & \text{se } x \text{ pertence as arestas} \\ \text{LINEAR,} & \text{de algum elemento.} \\ \\ \text{extensão} & \text{se } x \in K \text{ é ponto interior} \\ \text{harmônica,} & \text{de algum elemento } \mathcal{T}^H. \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Dependem do κ . Melhor na presença de contraste alto

Exemplo



Numero de condição de $M_2^{-1}A$

Theorem

$$\text{Cond}(M_2^{-1}A) \leq C \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} \left[1 + \frac{H}{\delta} \right],$$

Theorem

Assuma que a triangulação \mathcal{T}^h é conforme e quasi-uniforme. Considere preconditionador M_2^{-1} com o espaço grosso de funções lineares por partes ou o espaço grosso das funções de elementos finitos multi-escala. Seja A a matriz da forma bilinear com κ como elíptico satisfazendo. Temos que o número de condição do operador preconditionado é

$$\text{Cond}(M_2^{-1}A) \leq C \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} \left[1 + \frac{H}{\delta} \right],$$

onde a constante C é independente de h .

Numero de condição de $M_2^{-1}A$

Theorem

$$\text{Cond}(M_2^{-1}A) \leq C \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} \left[1 + \frac{H}{\delta} \right],$$

Theorem

Assuma que a triangulação \mathcal{T}^h é conforme e quasi-uniforme. Considere preconditionador M_2^{-1} com o espaço grosso de funções lineares por partes ou o espaço grosso das funções de elementos finitos multi-escala. Seja A a matriz da forma bilinear com κ como elíptico satisfazendo. Temos que o número de condição do operador preconditionado é

$$\text{Cond}(M_2^{-1}A) \leq C \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\min}} \left[1 + \frac{H}{\delta} \right],$$

onde a constante C é independente de h .

Experimentos numéricos

- ▶ $\Delta u = -1$ com condição de Dirichlet em $D = (0, 1) \times (0, 1)$.
- ▶ A malha grossa coincide com esta decomposição
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa como espaço grosso,

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2(1.2500)	8(2.9063)	10(5.4219)	14(7.6644)
4	7(4.5667)	12(4.9929)	15(5.1662)	15(5.1252)
8	9(4.5957)	14(5.3112)	16(5.4764)	15(5.4472)
16	11 (6.0372)	16(7.3533)	18(7.6699)	18(7.65)

Tabela: Número de iterações do gradiente conjugado preconditionado (estimativa do número de condição) . Aqui $h = 1/(nN)$ e $H = 1/N$ e o fixamos $\delta = 2h$.

Experimentos numéricos

- ▶ $\Delta u = -1$ com condição de Dirichlet em $D = (0, 1) \times (0, 1)$.
- ▶ A malha grossa coincide com esta decomposição
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa como espaço grosso,

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2(1.2500)	8(2.9063)	10(5.4219)	14(7.6644)
4	7(4.5667)	12(4.9929)	15(5.1662)	15(5.1252)
8	9(4.5957)	14(5.3112)	16(5.4764)	15(5.4472)
16	11 (6.0372)	16(7.3533)	18(7.6699)	18(7.65)

Tabela: Número de iterações do gradiente conjugado preconditionado (estimativa do número de condição) . Aqui $h = 1/(nN)$ e $H = 1/N$ e o fixamos $\delta = 2h$.

Experimentos numéricos

- ▶ $\Delta u = -1$ com condição de Dirichlet em $D = (0, 1) \times (0, 1)$.
- ▶ A malha grossa coincide com esta decomposição
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa como espaço grosso,

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2(1.2500)	8(2.9063)	10(5.4219)	14(7.6644)
4	7(4.5667)	12(4.9929)	15(5.1662)	15(5.1252)
8	9(4.5957)	14(5.3112)	16(5.4764)	15(5.4472)
16	11 (6.0372)	16(7.3533)	18(7.6699)	18(7.65)

Tabela: Número de iterações do gradiente conjugado preconditionado (estimativa do número de condição) . Aqui $h = 1/(nN)$ e $H = 1/N$ e o fixamos $\delta = 2h$.

Experimentos numéricos

- ▶ $\Delta u = -1$ com condição de Dirichlet em $D = (0, 1) \times (0, 1)$.
- ▶ A malha grossa coincide com esta decomposição
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa como espaço grosso,

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2(1.2500)	8(2.9063)	10(5.4219)	14(7.6644)
4	7(4.5667)	12(4.9929)	15(5.1662)	15(5.1252)
8	9(4.5957)	14(5.3112)	16(5.4764)	15(5.4472)
16	11 (6.0372)	16(7.3533)	18(7.6699)	18(7.65)

Tabela: Número de iterações do gradiente conjugado preconditionado (estimativa do número de condição) . Aqui $h = 1/(nN)$ e $H = 1/N$ e o fixamos $\delta = 2h$.

Experimentos numéricos

- ▶ $\Delta u = -1$ com condição de Dirichlet em $D = (0, 1) \times (0, 1)$.
- ▶ A malha grossa coincide com esta decomposição
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa como espaço grosso,

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2(1.2500)	8(2.9063)	10(5.4219)	14(7.6644)
4	7(4.5667)	12(4.9929)	15(5.1662)	15(5.1252)
8	9(4.5957)	14(5.3112)	16(5.4764)	15(5.4472)
16	11 (6.0372)	16(7.3533)	18(7.6699)	18(7.65)

Tabela: Número de iterações do gradiente conjugado preconditionado (estimativa do número de condição) . Aqui $h = 1/(nN)$ e $H = 1/N$ e o fixamos $\delta = 2h$.

Experimentos numéricos

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\blacktriangleright \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left(\kappa_1(x_1, \mu) + 100\kappa_2(x_1, p) \right) \left(\kappa_1(x_2, \mu) + 100\kappa_2(x_2, p) \right)$$

▶ coeficiente com contraste alto e variações nas escalas finas.

▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa quadrada gerada pelos subdomínios.

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2 (2.00)	16 (9.01)	20 (7.56)	19 (6.74)
4	2 (2.00)	18 (10.42)	22 (8.82)	25 (9.35)
8	2 (2.00)	18 (9.91)	25 (12.70)	36 (18.31)
16	2 (2.00)	18 (11.00)	30 (23.97)	45 (30.83)

Tabela: Iterações e condição. Consideramos $h = 1/(nN)$, $H = 1/N$ e

Experimentos numéricos

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\blacktriangleright \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left(\kappa_1(x_1, \mu) + 100\kappa_2(x_1, p) \right) \left(\kappa_1(x_2, \mu) + 100\kappa_2(x_2, p) \right)$$

- ▶ coeficiente com contraste alto e variações nas escalas finas.
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa quadrada gerada pelos subdomínios.

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2 (2.00)	16 (9.01)	20 (7.56)	19 (6.74)
4	2 (2.00)	18 (10.42)	22 (8.82)	25 (9.35)
8	2 (2.00)	18 (9.91)	25 (12.70)	36 (18.31)
16	2 (2.00)	18 (11.00)	30 (23.97)	45 (30.83)

Tabela: iterações e condição. Consideramos $h = 1/(nN)$, $H = 1/N$ e

Experimentos numéricos

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

$$\left(\kappa_1(x_1, \mu) + 100\kappa_2(x_1, p) \right) \left(\kappa_1(x_2, \mu) + 100\kappa_2(x_2, p) \right)$$

► **coeficiente com contraste alto e variações nas escalas finas.**

► Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa quadrada gerada pelos subdomínios.

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2 (2.00)	16 (9.01)	20 (7.56)	19 (6.74)
4	2 (2.00)	18 (10.42)	22 (8.82)	25 (9.35)
8	2 (2.00)	18 (9.91)	25 (12.70)	36 (18.31)
16	2 (2.00)	18 (11.00)	30 (23.97)	45 (30.83)

Tabela: iterações e condição. Consideramos $h = 1/(nN)$, $H = 1/N$ e

Experimentos numéricos

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$
- ▶ $\left(\kappa_1(x_1, \mu) + 100\kappa_2(x_1, p)\right)\left(\kappa_1(x_2, \mu) + 100\kappa_2(x_2, p)\right)$
- ▶ coeficiente com contraste alto e variações nas escalas finas.
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa quadrada gerada pelos subdomínios.

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2 (2.00)	16 (9.01)	20 (7.56)	19 (6.74)
4	2 (2.00)	18 (10.42)	22 (8.82)	25 (9.35)
8	2 (2.00)	18 (9.91)	25 (12.70)	36 (18.31)
16	2 (2.00)	18 (11.00)	30 (23.97)	45 (30.83)

Tabela: Iterações e condição. Consideramos $h = 1/(nN)$, $H = 1/N$ e

Experimentos numéricos

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$
- ▶ $(\kappa_1(x_1, \mu) + 100\kappa_2(x_1, p)) (\kappa_1(x_2, \mu) + 100\kappa_2(x_2, p))$
- ▶ coeficiente com contraste alto e variações nas escalas finas.
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa quadrada gerada pelos subdomínios.

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2 (2.00)	16 (9.01)	20 (7.56)	19 (6.74)
4	2 (2.00)	18 (10.42)	22 (8.82)	25 (9.35)
8	2 (2.00)	18 (9.91)	25 (12.70)	36 (18.31)
16	2 (2.00)	18 (11.00)	30 (23.97)	45 (30.83)

Tabela: Iterações e condição. Consideramos $h = 1/(nN)$, $H = 1/N$ e

Experimentos numéricos

Achar $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ▶
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x) & x \in D \\ u(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$
- ▶ $\left(\kappa_1(x_1, \mu) + 100\kappa_2(x_1, p)\right)\left(\kappa_1(x_2, \mu) + 100\kappa_2(x_2, p)\right)$
- ▶ coeficiente com contraste alto e variações nas escalas finas.
- ▶ Usamos o espaço de funções (bi)lineares por partes na malha grossa quadrada gerada pelos subdomínios.

$n \setminus N$	2	4	8	16
2	2 (2.00)	16 (9.01)	20 (7.56)	19 (6.74)
4	2 (2.00)	18 (10.42)	22 (8.82)	25 (9.35)
8	2 (2.00)	18 (9.91)	25 (12.70)	36 (18.31)
16	2 (2.00)	18 (11.00)	30 (23.97)	45 (30.83)

Tabela: Iterações e condição. Consideramos $h = 1/(nN)$, $H = 1/N$ e

Lema abstrato

Suponhamos,

1. **Decomposição estável:** Existe $C_0^2 > 0$ tal que, para toda $v \in V$, existe a decomposição $v = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} v_i$, com $v_i \in V^{(i)}$, $i = 0, \dots, N_S$, e

$$\sum_{i=0}^{N_S} a(v_i, v_i) \leq C_0^2 a(v, v). \quad (9)$$

2. **Estabilidade local:** Existe $\omega > 0$, tal que

$$\mathcal{A}(R^{(i)} v_i, R^{(i)T} v_i) \leq \omega \mathcal{A}^{(i)}(v_i, v_i) \quad \forall v_i \in V^{(i)}, \quad 0 \leq i \leq N_S.$$

3. **Desigualdades forte de Cauchy :** Existem \mathcal{E}_{ij} , $1 \leq i, j \leq N_S$, tais que para toda $v_i \in V^{(i)}$, $v_j \in V^{(j)}$

$$\mathcal{A}(R^{(i)T} v_i, R^{(j)} v_j) \leq \mathcal{E}_{ij} \mathcal{A}(R^{(i)T} v_i, R^{(i)T} v_i)^{1/2} \mathcal{A}(R^{(j)T} v_j, R^{(j)T} v_j).$$

Lema abstrato

Suponhamos,

1. **Decomposição estável:** Existe $C_0^2 > 0$ tal que, para toda $v \in V$, existe a decomposição $v = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} v_i$, com $v_i \in V^{(i)}$, $i = 0, \dots, N_S$, e

$$\sum_{i=0}^{N_S} a(v_i, v_i) \leq C_0^2 a(v, v). \quad (9)$$

2. **Estabilidade local:** Existe $\omega > 0$, tal que

$$\mathcal{A}(R^{(i)} v_i, R^{(i)T} v_i) \leq \omega \mathcal{A}^{(i)}(v_i, v_i) \quad \forall v_i \in V^{(i)}, \quad 0 \leq i \leq N_S.$$

3. **Desigualdades forte de Cauchy :** Existem \mathcal{E}_{ij} , $1 \leq i, j \leq N_S$, tais que para toda $v_i \in V^{(i)}$, $v_j \in V^{(j)}$

$$\mathcal{A}(R^{(i)T} v_i, R^{(j)} v_j) \leq \mathcal{E}_{ij} \mathcal{A}(R^{(i)T} v_i, R^{(i)T} v_i)^{1/2} \mathcal{A}(R^{(j)T} v_j, R^{(j)T} v_j).$$

Lema abstrato

Suponhamos,

1. **Decomposição estável:** Existe $C_0^2 > 0$ tal que, para toda $v \in V$, existe a decomposição $v = \sum_{i=0}^{N_S} R^{(i)T} v_i$, com $v_i \in V^{(i)}$, $i = 0, \dots, N_S$, e

$$\sum_{i=0}^{N_S} a(v_i, v_i) \leq C_0^2 a(v, v). \quad (9)$$

2. **Estabilidade local:** Existe $\omega > 0$, tal que

$$\mathcal{A}(R^{(i)} v_i, R^{(i)T} v_i) \leq \omega \mathcal{A}^{(i)}(v_i, v_i) \quad \forall v_i \in V^{(i)}, \quad 0 \leq i \leq N_S.$$

3. **Desigualdades forte de Cauchy :** Existem \mathcal{E}_{ij} , $1 \leq i, j \leq N_S$, tais que para toda $v_i \in V^{(i)}$, $v_j \in V^{(j)}$

$$\mathcal{A}(R^{(i)T} v_i, R^{(j)} v_j) \leq \mathcal{E}_{ij} \mathcal{A}(R^{(i)T} v_i, R^{(i)T} v_i)^{1/2} \mathcal{A}(R^{(j)T} v_j, R^{(j)T} v_j).$$

Lema abstrato

Então

$$\text{Cond}(M_1^{-1}A) = \kappa(T) \leq (\rho(\mathcal{E}) + 1)\omega C_0^{-2}. \quad (10)$$

Observação

Para estimar o número de condição do preconditionador aditivo de dois níveis temos que verificar as três hipóteses do lema anterior.

Bibliografía recomendada



Tarek Mathew.

Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations.

Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
Springer, 2008.



Barry F. Smith, Petter E. Bjørstad, and William D. Gropp.

Domain decomposition.

Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations.



Andrea Toselli and Olof Widlund.

Domain decomposition methods—algorithms and theory,
volume 34 of *Springer Series in Computational Mathematics.*

Springer-Verlag, Berlin, 2005.