

FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

DIPLOMARBEIT

im Studiengang Physik

vorgelegt von

Matthias Sebastian Maier

aus Neunkirchen (Saar)

Januar 2011

Simulation von Grenzschichtströmungen über Ribletstrukturen

Die Diplomarbeit wurde von

Matthias Sebastian Maier

ausgeführt am

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

unter der Betreuung von

Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. Rolf Rannacher

sowie von

Herrn Priv.-Doz. Dr. Christoph S. Garbe

INTERDISZIPLINÄRES ZENTRUM FÜR WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

Simulation von Grenzschichtströmungen über Ribletstrukturen:

Eine klassische Möglichkeit der Strömungskontrolle ist die Beeinflussung der Grenzschicht durch das Anbringen von periodischen Oberflächenstrukturen mit einer charakteristischen, in Strömungsrichtung verlaufenden Rillenform – sogenannte Ribletstrukturen.

In dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell für Ribletstrukturen analytisch und numerisch behandelt, sowie die erhaltenen Ergebnisse physikalisch interpretiert. Hierzu wird ein stationäres Modell einer periodischen Strömung über Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht numerisch direkt simuliert und eine Theorie des korrekten Vergleichs der Simulationsdaten aufgestellt. Der große Vorteil des stationären Modells liegt in der analytischen Handhabbarkeit, was mit Hilfe der Homogenisierung eine effiziente Berechnung wichtiger Kenngrößen, wie z. B. des Strömungswiderstandes, über zweidimensionale Hilfsprobleme ermöglicht. Mit der Erweiterung des Modells auf ein instationäres Modell von Ribletstrukturen im Bufferlayer und durch die Kopplung des Grenzschichtmodells mit Hilfe von zeitabhängigen Randdaten an eine äußere, turbulente Überströmung werden die Grundbausteine für Simulationen gelegt, die sowohl Turbulenz als auch Mikrostruktur mit einem angemessenen Aufwand auflösen können.

Simulation of Boundary-Layer Flow over Riblet Structures:

A classic method of flow control is manipulating the boundary layer using tiny, streamwise grooves—so-called riblet structures.

This work treats a mathematical model of riblet structures from an analytical and numerical point of view, as well as giving a physical interpretation of the results. Therefore, a direct numerical simulation of a stationary model of a periodic flow over riblet structures in the viscous sublayer is performed, and a theory for the correct comparison of the simulation results is proposed. The big advantage of the stationary model is the analytical manageability, which enables the calculation of important flow characteristics with the help of the homogenization theory by solving two-dimensional auxiliary problems. By widening the scope of the model, enabling it to simulate an instationary flow over riblet structures in the buffer layer and by coupling the boundary-layer model with a turbulent channel flow with the help of time-dependent boundary conditions one finally tries to further enhance its significance by enabling simulations which resolve both, turbulence and microstructure, in a reasonable complexity.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Notation	3
1.2	Definition der wichtigsten Funktionenräume	4
2	Physikalische Grundlagen	9
2.1	Die Navier-Stokes-Gleichungen	9
2.1.1	Physikalische Herleitung	9
2.1.2	Randbedingung und viskose Kräfte	14
2.1.3	Reskalierung	16
2.2	Grenzschichttheorie	17
2.2.1	Laminare und turbulente Grenzschichten	18
2.2.2	Spezielle Wahl der Reskalierung	22
2.3	Physikalische Wirkungsweise von Riblets	24
3	Ein stationäres Modell	27
3.1	Modellformulierung	27
3.2	Aussagekraft und Limitierung	29
3.3	Direkte numerische Simulation	30
3.3.1	Variationelle Formulierung	30
3.3.2	Formulierung als Galerkinverfahren	33
3.3.3	Berechnung des Strömungswiderstands	39
3.3.4	A posteriori - Fehleranalyse	41
3.4	Ribletgeometrien	45
3.5	Numerische Ergebnisse	48
3.5.1	Konvergenz des Strömungswiderstands	48
3.5.2	Resultate	53
3.6	Strömungsprofil und Eindringtiefe	56
3.6.1	Vergleich	57
3.6.2	Stabilität	60
4	Berechnung des Widerstands mit Hilfe von Zellproblemen	63
4.1	Homogenisierung des Modellproblems	63
4.1.1	Das dreidimensionale Zellproblem	67
4.1.2	Die zweidimensionalen Zellprobleme für Ribletstrukturen	72
4.1.3	Schätzung von Strömungswiderstand und Eindringtiefe	73
4.2	Direkte numerische Simulation	74

4.2.1	Implementierungsaspekte	74
4.2.2	Parameterwahl	76
4.2.3	Ergebnisse	77
4.2.4	Vergleich der Eindringtiefe und des Strömungswiderstands	79
4.3	Erweiterung der Homogenisierung auf quasistationäre Probleme	80
5	Ein instationäres Modell	83
5.1	Modellformulierung	83
5.2	Direkte numerische Simulation	87
5.2.1	Variationelle Formulierung	87
5.2.2	Formulierung als Einschrittverfahren	89
5.2.3	Berechnung des Strömungswiderstands	91
5.2.4	Kritische Betrachtung	92
5.3	Numerische Ergebnisse	93
5.3.1	Test zur Verträglichkeit der Simulationsdaten	93
5.3.2	Wahl der Zeitschrittweite	96
5.3.3	Simulationsreihe	98
5.4	Interpretation	104
6	Zusammenfassung	105
A	Periodische Funktionenräume	107
A.1	Charakterisierung von periodischen Räumen	107
A.2	Lösungstheorie des periodischen Stokes-Problems	109
	Abbildungsverzeichnis	115
	Tabellenverzeichnis	117
	Literaturverzeichnis	119

1 Einleitung

Einer der zentralen Forschungsgegenstände im Bereich der Strömungsmechanik der letzten 30 Jahre ist die Beeinflussung und Kontrolle von Strömungssituationen. Ziel ist es, durch Einflussnahme auf eine Strömung entscheidende Strömungscharakteristika günstig zu beeinflussen, so dass der Strömungswiderstand reduziert wird.

Dies kann prinzipiell durch eine Vielzahl von Ansätzen geschehen – so ist unter anderem neben der klassischen aerodynamischen Formoptimierung (z. B. von Automobilen oder Flugzeugrümpfen) auch die Strömungskontrolle durch Absaugen oder Ausblasen von Strömungsgrenzschichten am Rand, sowie das Einbringen von Polymerstrukturen in Ölpipelines erfolgreich zur Widerstandsverminderung eingesetzt worden.

Eine neben dem Absaugen und Ausblasen weitere klassische Möglichkeit der Strömungskontrolle durch Beeinflussung der Grenzschicht ist das Anbringen von periodischen Oberflächenstrukturen auf der Oberfläche des umströmten Körpers. Vorbild sind dabei in der Natur gefundene Oberflächenstrukturen bei Haien. Es stellt sich heraus, dass bei verschiedenen Haispezies, die vor allem als schnelle Schwimmer bekannt sind, nicht etwa eine besonders glatte Hautoberfläche auftritt, sondern hoch geordnete Placoidschuppen, die auf ihrer Oberfläche eine charakteristische Rillenform – sogenannte *Ribletstrukturen* – mit einer typischen Größe von 0.01 – 0.1 mm aufweisen (vgl. Abb. 1.1). Insbesondere fällt auf, dass diese Rillen in Bereichen sehr hoher Strömungswiderstände, wie z. B. an der Schwanzflosse, hochgradig geordnet in Strömungsrichtung verlaufen (vgl. Bechert u. a. 2000).

In Bereichen, die weniger kritisch für den Strömungswiderstand des Hais sind, bzw. in Bereichen mit ungeordneter Anströmung ist die Ordnung der Ribletstrukturen geringer. Ebenso weisen einzelne Haispezies mit deutlich geringerer Maximalgeschwindigkeit stellenweise auch eine Noppenstruktur anstelle von Riblets auf.

Die Vermutung liegt also nahe, dass Ribletstrukturen einen widerstandsoptimierenden Einfluss auf die Umströmung des Hais haben.

Umfangreiche Untersuchungen verschiedener Arbeitsgruppen haben in den letzten Jahrzehnten einen widerstandsoptimierenden Effekt von Ribletstrukturen nachgewiesen. Exemplarisch sei hier auf die grundlegenden Arbeiten von Bechert u. a. (1985, 1997, 2000) und Walsh (1983) verwiesen, bei denen Widerstandsverminderungen von bis zu 10 % auftraten.

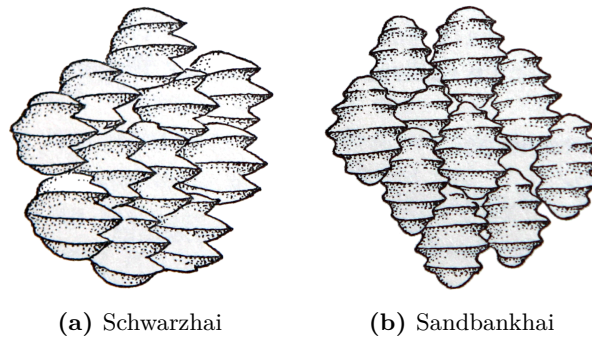


Abbildung 1.1: Bei verschiedenen Haispezies gefundene Ribletstrukturen auf den Placoidschuppen (Abbildungen aus Steuben u. Krefft 1995)

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, ein mathematisches Modell für Ribletstrukturen analytisch und numerisch zu behandeln, sowie die erhaltenen Ergebnisse physikalisch zu interpretieren.

Hierzu werden in Kapitel 2 die notwendigen physikalischen Grundlagen der Strömungsmechanik und der Prandtlischen Grenzschichttheorie vorgestellt und eine strömungsmechanische Erklärung der Wirkungsweise von Ribletstrukturen gegeben. Die in Abschnitt 2.2.2 formulierte Reskalierung der Strömungssituation in viskose Wandeinheiten ermöglicht es, die simulierten Modelle physikalisch korrekt zu interpretieren.

In Kapitel 3 wird ein stationäres Modell einer periodischen Strömung über Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht numerisch direkt simuliert und eine Theorie des korrekten Vergleichs der erhaltenen Simulationsdaten mit Hilfe der Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ in Abschnitt 3.6.1 aufgestellt. Trotz der signifikanten Vereinfachung der Strömungssituation durch das Modell ist es mit diesem möglich, grundlegende Mechanismen der Widerstandsreduktion von Ribletstrukturen, wie das in Kapitel 2 beschriebene Umlenken der Strömung in die Hauptströmungsrichtung, zu beobachten und wichtige Kenngrößen, wie die Eindringtiefe, quantitativ zu ermitteln.

Der entscheidende Vorteil des stationären Modells liegt in der analytischen Handhabbarkeit. Mit Hilfe der von Jäger u. Mikelić (1996, 2001, 2003) entwickelten Homogenisierungstheorie des stationären Modells werden wir in Kapitel 4 die in Kapitel 3 berechneten Kenngrößen des Strömungswiderstands und der Eindringtiefe mit Hilfe der Simulation zweidimensionaler Zellprobleme effizient approximieren. Dabei sind wir in der Lage, den Strömungswiderstand des stationären Modells innerhalb des angenommenen Simulationsfehlers der direkten numerischen Simulation von 1% zu schätzen – und dies mit deutlich geringerem rechnerischen Aufwand (vgl. Abschnitt 4.2.4).

Abschließend wird das stationäre Modell in Kapitel 5 auf ein instationäres Modell zur Simulation einer Strömung über Ribletstrukturen im Bufferlayer erweitert. Hierbei kommt eine an die Ankopplung hybrider Verfahren angelehnte Methode zum Einsatz,

bei der eine Außenströmung in Form von zeitabhängigen Randdaten der Simulation aufgeprägt wird – das Feedback zurück zur Außenströmung wird allerdings durch eine vom stationären Fall motivierte Korrektur der aufgeprägten Randdaten ersetzt (vgl. Abschnitt 5.1). Die hierfür notwendige Start- und Randwertvorgabe wird aus einer direkten numerischen Simulation einer vollturbulenten Kanalströmung (Bettina Frohnäpfel, Center of Smart Interfaces, TU Darmstadt) abgegriffen.

1.1 Notation

In der Arbeit wird die folgende mathematische Notation verwendet.

Es bezeichnet (\cdot, \cdot) stets das L^2 -Skalarprodukt und $\|\cdot\|$ die L^2 -Norm:

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, d\mathbf{x}, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Wird eine andere Norm oder ein anderes Skalarprodukt betrachtet, so wird dies durch einen Index gekennzeichnet: $\|\cdot\|_{H^m}$, $(\cdot, \cdot)_{H^m}$, etc.

Sei X ein beliebiger Funktionenraum. Unter einer *vektorwertigen Funktion* $\mathbf{f} \in X^k$ sei stets eine Funktion $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ verstanden, deren Komponenten $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen in X sind. Vektorwertige Funktionen werden – ebenso wie Vektoren – fett gesetzt. Wir vereinbaren für einen Funktionenraum X mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ oder Norm $\|\cdot\|_X$ im Fall von vektorwertigen Funktionen $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in X^k$ folgende sinnvolle Erweiterung des Skalarproduktes und der Norm auf X^k :

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{X^k} := \sum_{i=1}^k (f_i, g_i)_X, \quad \|\mathbf{f}\|_{X^k} := \left(\sum_{i=1}^k \|f_i\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

Der *Laplace-Operator* hat für $f \in H^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Gestalt

$$\Delta f = \left(\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2 \right) f,$$

wobei ∂_i die partielle Ableitung in \mathbf{e}_i -Richtung des \mathbb{R}^n bezeichnet. Der *symbolische Nabla-Operator* wird definiert durch

$$\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_n)^T.$$

Mit dem gleichen Symbol definieren wir zusätzlich den *Gradienten* ∇p einer skalaren Funktion $p \in H^1(\Omega)$:

$$\nabla p \in L^2(\Omega)^n \text{ mit } (\nabla p)_i := \partial_i p,$$

sowie die *Jakobi-Matrix* $\nabla \mathbf{v}$ einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^k$:

$$\nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{k \times n} \text{ mit } (\nabla \mathbf{v})_{ij} := \partial_j v_i.$$

Bemerkung: Die Definition von Gradient und Jakobi-Matrix stimmt für skalare Funktionen nicht überein. Es sei deshalb vereinbart, dass in diesem Fall stets der Gradient, also der *Spaltenvektor* der Ableitungen betrachtet wird, und nicht der *Zeilenvektor* der Jakobi-Matrix.

Die volle Kontraktion von Vektoren und Matrizen wird mit einem „ \cdot “ gekennzeichnet. Mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^n$, $p \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien ein paar wichtige Beispiele formuliert:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^n v_i w_i, \\ \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} &= \sum_{i,j=1}^n (\partial_j v_i)(\partial_j w_i), \\ \nabla p \cdot \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^n (\partial_i p) w_i, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n \partial_i v_i.\end{aligned}$$

Ebenso soll mit „ \cdot “ die übliche Matrix-Vektor-Multiplikation geschrieben werden. Dabei hat die Interpretation des ∇ -Symbols als Jakobi-Matrix Präferenz, d. h. es ist für $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^n v_j (\partial_i v_j) \mathbf{e}_i, \text{ aber} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^n v_j (\partial_j v_i) \mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

Die volle Kontraktion einer Matrix $\nabla \mathbf{v}$ mit zwei Vektoren $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ sei durch $\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}$ gekennzeichnet:

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} = \sum_{i,j=1}^n \varphi_j (\partial_i v_j) \psi_i.$$

Bei Operatoren solle stets Linksklammerung gelten, es ist z. B. $\nabla p q = (\nabla p) q$.

Für eine Teilmenge M eines topologischen Raums bezeichne \overline{M} den Abschluss, M° das Innere und ∂M den Rand von M .

1.2 Definition der wichtigsten Funktionenräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Wir definieren $C^m(\Omega)$ für $0 \leq m < \infty$ als den Raum der reellwertigen, m -fach stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf Ω und setzen zusätzlich $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$.

Unter $C^m(\bar{\Omega})$ sei der Raum der reellwertigen, m -fach stetig partiell differenzierbaren Funktionen verstanden, deren Ableitungen bis zur m -ten Stufe stetige Fortsetzungen auf $\bar{\Omega}$ besitzen. $C_0^\infty(\Omega)$ ist der Raum aller C^∞ -Funktionen mit kompakten Träger in Ω .

Des Weiteren bezeichne $L^2(\Omega)$ wie üblich den Raum der reellwertigen, Lebesgue-messbaren und *quadratintegrablen* Funktionen auf Ω . $L^2(\Omega)$ ist unter der Identifikation von Funktionen, die sich bis auf eine Lebesgue-Nullmenge unterscheiden, zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

ein Hilbertraum. Wir setzen $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$.

Unter einem *Multiindex* α versteht man $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Man definiert dessen *Grad* zu $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und definiert weiterhin mit dessen Hilfe die verallgemeinerte α -te Ableitung:

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Der *Sobolev-Raum* $H^m(\Omega)$ ist der Raum aller L^2 -Funktionen f , deren distributionelle Ableitungen $D^\alpha f$,

$$(D^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

bis zum Grad m als L^2 -Funktionen darstellbar sind:

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega) \forall 0 \leq |\alpha| \leq m \right\}.$$

$H^m(\Omega)$ ist zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{H^m} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)$$

ein Hilbertraum.

Ist Ω ein offenes und beschränktes Gebiet, so liegt $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ dicht in $H^m(\Omega)$, d. h. es gilt die Charakterisierung

$$H^m(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}}.$$

Diese Eigenschaft werden wir bei der Definition von periodischen Sobolevräumen im nächsten Abschnitt ausnutzen. Abschließend sei noch der Raum der H^1 -Funktionen mit Nullrandwerten definiert:

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}}.$$

Bei unbeschränkten Gebieten Ω ist die Integrabilitätsbedingung auf ganz Ω der bisher definierten Räume L^2 und H^m stellenweise zu einschränkend. Man behilft sich dann mit dem Konzept der *lokalintegriblen* Funktionen. Wir setzen

$$H_{\text{loc}}^m(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt. } f|_{\overset{\circ}{K}} \in H^m(\overset{\circ}{K}) \right\}$$

und analog

$$L_{\text{loc}}^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt. } f|_{\overset{\circ}{K}} \in L^2(\overset{\circ}{K}) \right\}.$$

Diese Funktionenräume sind nicht normiert.

Periodische Funktionenräume

Für stetige Funktionen definiert man Periodizität wie erwartet über Punktwerte, d. h. $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ heißt *periodisch in der e_i -Richtung mit Periode ε* , falls gilt

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \varepsilon k \mathbf{e}_i) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun das in Abb. 1.2a gezeigte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon) : \Gamma_1(x, z) < y < \Gamma_2(x, z)\}.$$

Wir fordern für die beiden Randparametrisierungen Γ_1, Γ_2 :

- i.) Γ_1, Γ_2 stetig,
- ii.) Γ_1, Γ_2 sind periodisch in beide Richtungen mit Periode ε ,
- iii.) $\Gamma_1(x, z) < \Gamma_2(x, z) \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2$.

Somit ist

$$\hat{\Omega} := \left(\bigcup_{k, l \in \mathbb{Z}} \bar{\Omega} + (\varepsilon k, 0, \varepsilon l) \right)^\circ$$

ein offenes, einfach-zusammenhängendes Gebiet im \mathbb{R}^3 mit C^0 -Rand.

Man definiert

$$C_{\text{per}}^m(\Omega) := \left\{ f \in C^m(\hat{\Omega}) : f \text{ ist } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\text{-periodisch mit Periode } \varepsilon \right\}.$$

Diese Definition ermöglicht es nun die Eigenschaft der Periodizität auf Sobolev-Räume zu übertragen. Es sei

$$H_{\text{per}}^m(\Omega) := \overline{C_{\text{per}}^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}}, \text{ und}$$

$$L_{\text{per}}^2(\Omega) := \overline{C_{\text{per}}^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}.$$

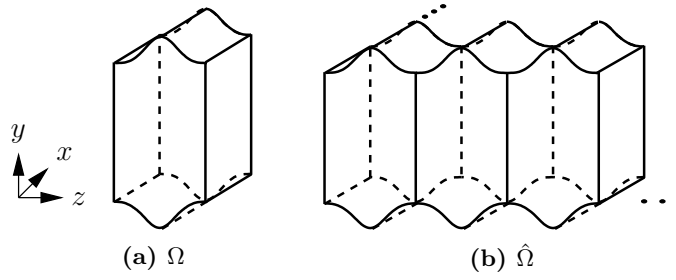


Abbildung 1.2: Zur Definition von periodischen Ansatzräumen auf Ω setzt man das Gebiet Ω durch Aneinanderreihen von Kopien in der e_1 -, und e_3 -Richtung zum Gebiet $\hat{\Omega}$ fort.

Wie im vorangegangenen Fall sind auch die periodischen Räume zusammen mit den entsprechenden Skalarprodukten

$$\begin{aligned} (f, g)_{H_{\text{per}}^m(\Omega)} &:= (f, g)_{H^m(\Omega)}, \\ (f, g)_{L_{\text{per}}^2(\Omega)} &:= (f, g)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

wieder Hilberträume.

Bemerkung: Unter der Konvention, dass Funktionen mit Definitionsbereich Ω durch Hintereinanderkopieren auf $\hat{\Omega}$ fortgesetzt seien, ist $L_{\text{per}}^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)$.

Proposition 1.1: Der Raum $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ besitzt die folgende Charakterisierung über Spurwerte:

$$u \in H_{\text{per}}^1(\Omega) \iff u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \gamma_i u \cong \gamma_j u \text{ für gegenüberliegende periodische Randkomponenten } \Gamma_i, \Gamma_j \text{ von } \Omega^1.$$

Beweis: Der Beweis dieser Proposition ist in Abschnitt A.1 des Anhangs zu finden. \square

Abschließend erlauben wir für die Wahl von Ω noch Gebiete, die in eine Richtung unbeschränkt sind, d. h.

$$\Omega = \{(x, y, z) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon) : \Gamma_1(x, z) < y < \infty\}.$$

¹Die periodischen Randkomponenten Γ_i sind gerade die Flächen, an denen Kopien von Ω zum großen Gebiet $\hat{\Omega}$ verklebt werden.

Man definiert nun (um die Periodizität sinnvoll zu übertragen) geringfügig abweichend von der vorangegangenen Definition lokalintegrierbarer Funktionenräume:

$$H_{\text{per, loc}}^m(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \forall h \in \mathbb{R}^+ \text{ ist } f \in H_{\text{per}}^m(\Omega \cap \{-h < y < h\}) \right\}.$$

D. h. eine Funktion in $H_{\text{per, loc}}^m(\Omega)$ kann stets lokal durch eine Funktion in $C_{\text{per}}^\infty(\Omega)$ in der H^m -Norm approximiert werden.

Spurwerte

Es sei Ω ein offenes und beschränktes Gebiet mit stückweise C^2 -Rand Γ . Dann gibt es einen linearen und stetigen Operator $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ mit der Eigenschaft, dass γu = „die Einschränkung von u auf Γ “ ist für jedes $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ (Temam 2001, Kapitel I.1.3). Es sei $H^{1/2}(\Gamma)$ das Bild von $H^1(\Omega)$ unter γ . Dieses liegt dicht in $L^2(\Gamma)$.

Sei Γ_i eine Randkomponente von Γ . Wir bezeichnen mit

$$\gamma_i : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma_i)$$

die Einschränkung $\gamma u|_{\Gamma_i}$ für ein $u \in H^1(\Omega)$.

Der Sprung $[\cdot]_{\Gamma_i}$ über Γ_i ist definiert als die Differenz der „links“ und „rechtsseitigen“ Spurwerte.

Genauer vereinbaren wir für Sprünge von Funktionen $\varphi \in H^1(\Omega)$ auf *periodische* Randkomponenten Γ_i :

$$[\varphi]_{\Gamma_i} := \gamma_i \varphi - \gamma_j \varphi,$$

wobei γ_j die Spur auf die periodische Randkomponente Γ_j sei, die Γ_i gegenüberliegt.

Mittelwerte

Zur Sicherung der Eindeutigkeit einer Problemstellung ist es häufig notwendig, an Lösungskomponenten, die ansonsten bis auf eine Konstante bestimmt sind, eine Mittelwertbedingung zu stellen. So z. B.

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0.$$

Um dies nicht immer explizit angeben zu müssen, soll die Mittelwertbedingung über die Äquivalenzklassenbildung im Ansatzraum versteckt werden. Man betrachtet dazu die Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ mit $f + k \equiv g$ in $L^2(\Omega)$, und teilt mit deren Hilfe konstante Funktionen aus den Ansatzräumen heraus:

$$L^2(\Omega) / \mathbb{R} := L^2(\Omega) / \sim,$$

$$H^m(\Omega) / \mathbb{R} := H^m(\Omega) / \sim.$$

2 Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel entwickeln wir die notwendige physikalische Begriffsbildung, um die widerstandsoptimierenden Effekte von Ribletstrukturen beschreiben zu können. Diese umfasst die *Navier-Stokes*-Gleichungen als Gleichungssystem, welches die zeitliche Entwicklung eines Fluids beschreibt, und das Konzept der Grenzschichttheorie, in dessen Rahmen sich die Wirkungsweise von Ribletstrukturen formulieren lässt.

2.1 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die *Navier-Stokes*-Gleichungen sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Sie bilden ein geschlossenes System, das die zeitliche Entwicklung eines Fluids beschreibt. Die Navier-Stokes-Gleichungen sind dabei keine „ad-hoc“-Annahme, sondern können aus einer Reihe von physikalischen Prinzipien hergeleitet werden. Dies soll in Anlehnung an Chorin u. Marsden (2000) in diesem Abschnitt geschehen.

Da es sich hierbei um eine physikalische Motivation handelt, seien der Einfachheit halber bis zum Ende des Kapitels Funktionen und Gebiete stets als ausreichend regulär angenommen, so dass die üblichen Sätze der Integral- und Differentialrechnung angewendet werden dürfen. Der notwendige Übergang zu einem rigorosen, *schwachen* Lösungsbegriff wird dann bei der entsprechenden Modellformulierung nachgeholt.

2.1.1 Physikalische Herleitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. In Ω wollen wir die Strömung eines Fluids betrachten. Hierbei sei angenommen, dass die Strömung auf einer makroskopischen Skala stattfindet, so dass es möglich ist, das Fluid als eine kontinuierliche, zeitabhängige Masseverteilung $\rho(\mathbf{x}, t)$,

$$\rho : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

zu interpretieren, der man in jedem Punkt (\mathbf{x}, t) eine momentane Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

des sich in diesem Punkt befindlichen Fluidpartikels zuordnen kann. Diese Beschreibung ist als *Eulersches Bezugssystem* bekannt. Kennzeichnend ist, dass die betrachteten

Koordinaten (\mathbf{x}, t) raumfest sind und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sich auf das Partikel bezieht, welches sich zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} befindet.

Dem gegenüber wird im *Lagrangeschen Bezugssystem* ein Partikel durch seine Position $\boldsymbol{\xi}$ zu einem Referenzzeitpunkt t_0 bestimmt. Der Ort $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, t)$ des Partikels zu einem anderen Zeitpunkt t , welches sich am Referenzpunkt $\boldsymbol{\xi}$ befunden hat, sei durch eine Funktion

$$\boldsymbol{\varphi} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$$

gegeben. Die Funktion $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}} : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$, $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, t)$ beschreibt offensichtlich die Trajektorie eines Partikels; analog $\boldsymbol{\varphi}_t : \Omega \longrightarrow \Omega$ die Partikelverteilung zu einem Zeitpunkt t . Wir nehmen im Folgenden zusätzlich an, dass $\boldsymbol{\varphi}_t$ für alle t stets bijektiv ist. Dies ist notwendig, um die folgende Proposition, die später benutzt wird, zu beweisen:

Proposition 2.1 (Transporttheorem): Sei V_0 ein Teilvolumen von Ω . Es bezeichne V_t das durch die Bewegung des Fluids mitgeführte Volumen, welches aus den Partikeln entsteht, die sich zum Zeitpunkt t_0 in V_0 befinden. Genauer

$$V_t = \boldsymbol{\varphi}_t(V_0),$$

mit der oben definierten Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$.

Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \partial_t f + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Beweis: Ein Beweis dieser Proposition ist in (Chorin u. Marsden 2000, Kapitel 1.1) zu finden. \square

Massenerhaltung

Das Fluid soll die üblichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten erfüllen. Wir fordern deshalb insbesondere das Prinzip der Massenerhaltung. Sei $V \subset \Omega$ ein beliebiges, fest gewähltes Teilvolumen. Die zeitliche Änderung der Masse in V ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_V \partial_t \rho \, d\mathbf{x}.$$

Die physikalische Forderung nach Massenerhaltung kann dahingehend verstanden werden, dass die zeitliche Änderung der in V befindlichen Masse gleich der Masse sein muss, die in der gleichen Zeiteinheit über den Rand ein- bzw. ausströmt, d. h.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Hierbei ist \mathbf{n} das nach Außen gerichtete Normalenfeld auf ∂V . Mit Hilfe des Satzes von Gauß erhält man also

$$\int_V \partial_t \rho \, d\mathbf{x} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

und aufgrund der beliebigen Wahl von V :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (2.2)$$

Diese differentielle Form der Massenerhaltung ist als *Kontinuitätsgleichung* bekannt. Aus ihr folgt unmittelbar eine häufig benutzte Variante des Transporttheorems:

Korollar 2.2: Sei V_t ein vom Fluid mitgeführtes Volumen, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ausreichend regulär und ρ die Dichtefunktion. Es gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho f \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \rho (\partial_t f + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f) \, d\mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Beweis: Dies ist eine einfache Konsequenz aus der Kontinuitätsgleichung (2.2) und obiger Proposition. \square

Impulsgleichung

Betrachten wir nun ein beliebiges, vom Fluid mitgeführtes Volumen V_t . Der Gesamtimpuls des Volumens zu einem Zeitpunkt t ist

$$\int_{V_t} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Das *zweite Newtonsche Gesetz* besagt, dass die zeitliche Änderung dieses Gesamtimpulses gleich der Gesamtkraft ist, die auf das Volumen wirkt,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \text{„Summe aller Kräfte auf das Volumen } V_t\text{“}.$$

An dieser Stelle seien *äußere Kräfte* (z. B. das Schwerfeld) vernachlässigt und nur *innere Kräfte*, die eine Kraftwirkung des Fluids auf sich selbst beschreiben, in Betracht gezogen. Man stellt fest, dass innere Kräfte des Volumens V_t aufgrund des *dritten Newtonschen Gesetzes* („*actio* *gegengleich* *reactio*“) zu keiner Gesamtimpulsänderung des Volumens führen können. Nimmt man weiterhin an, dass eine Kraftwirkung nur

lokal hervorgerufen wird, so lässt sich die Kraft auf V_t durch ein Integral über den Rand von V_t beschreiben:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V_t} \sigma(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}, \rho, \mathbf{n}) \, d\mathbf{o},$$

wobei σ der sogenannte *Spannungstensor* ist. Die so noch sehr allgemeine Form des Spannungstensors wird durch eine Reihe physikalischer Annahmen entscheidend eingeschränkt. Wir fordern:

- i.) σ ist unabhängig von der Dichte ρ , sowie vom Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} ,

$$\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t, \nabla \mathbf{v}, \mathbf{n}).$$

Die Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit \mathbf{v} bedeutet, dass wir ein Fluid betrachten: Innere Kräfte sollen nicht von der Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} , sondern nur von deren räumlichen Änderung $\nabla \mathbf{v}$ abhängen.

Die Unabhängigkeit von ρ erscheint für Fluide, in denen keine großen Dichteänderungen auftreten, plausibel.

- ii.) σ ist eine lineare Funktion in \mathbf{n} , d. h.

$$\sigma(\mathbf{x}, t, \nabla \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}, t, \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n},$$

mit $\sigma(\mathbf{x}, t, \nabla \mathbf{v}) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ für festes (\mathbf{x}, t) und $\nabla \mathbf{v}$.

- iii.) Die direkte Orts- und Zeitabhängigkeit von σ kann durch eine skalare Funktion $p : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dem *Druck*, in folgender Form beschrieben werden:

$$\sigma(\mathbf{x}, t, \nabla \mathbf{v}) = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + \tilde{\sigma}(\nabla \mathbf{v}). \quad (2.4)$$

- iv.) $\tilde{\sigma}$ ist eine lineare Funktion in Abhängigkeit von $\nabla \mathbf{v}$, d. h. man betrachtet ein *Newtonsches Fluid*.

- v.) $\tilde{\sigma}$ ist invariant unter Drehungen, d. h. für jede orthogonale Matrix O ist

$$\tilde{\sigma}(O \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot O^{-1}) = O \cdot \tilde{\sigma}(\nabla \mathbf{v}) \cdot O^{-1}.$$

Diese Forderung bedeutet, dass die Wirkung von $\tilde{\sigma}$ nicht orientierungsabhängig sein soll. Dies ist plausibel für Fluide, die keine ausgezeichnete Symmetrieachse besitzen.

- vi.) $\tilde{\sigma}$ ist ein symmetrischer Tensor. Dies ist äquivalent zur Drehimpulserhaltung (vgl. Chorin u. Marsden 2000).

Aus Eigenschaft (iv.) – (vi.) folgt, dass $\tilde{\sigma}$ nur linear vom symmetrischen Tensor $\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T$ und von dessen Spur $\nabla \cdot \mathbf{v}$ abhängen kann, d. h. nur die Gestalt

$$\tilde{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (2.5)$$

mit gewissen *Viskositätsparametern* λ , μ besitzen kann (vgl. Chorin u. Marsden 2000, Kapitel 1.3). Dies führt uns letztendlich zu einer Gleichung der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V_t} \left(-p \mathbf{I} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

bzw. nach Anwenden von Korollar 2.2 auf das linke Integral und den Gaußschen Integralsatz auf das rechte:

$$\int_{V_t} \rho (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} -\nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \, d\mathbf{x}.$$

Durch die Beliebigkeit der Wahl des Volumens V_t kommt man sofort zur differentiellen Form der Gleichung. Die Hinzunahme der Kontinuitätsgleichung liefert die *kompressiblen, zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen*:

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T), \\ \partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \end{cases} \quad (2.6)$$

Dieses System aus 4 Differentialgleichungen für 5 unbekannte Größen (ρ , p , \mathbf{v}) ist allerdings noch unterbestimmt. Man muss demnach noch eine weitere Annahme an das Fluid formulieren.

Inkompressibilität

Wasser ist (im Gegensatz zu Luft) ein hochgradig inkompressibles Fluid. Dies kann man unter anderem dadurch charakterisieren, dass ein zeitlich mitgeführtes Volumen V_t im Fluid seinen Volumeninhalt nicht ändert:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} d\mathbf{x} = 0.$$

Anwenden des Transporttheorems (2.1) liefert

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} 1 \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0,$$

oder in differentieller Form $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.1 (Inkompressibles Fluid): Ein Fluid heißt *inkompressibel*, falls das zugehörige Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} stets der Differentialgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

genügt.

Eine weitere Annahme, die zur Vereinfachung an ein Fluid gestellt werden kann, ist die der *Homogenität* eines Fluids:

Definition 2.2 (Homogenes Fluid): Ein Fluid heißt *homogen*, falls die zugehörige Dichtefunktion ρ eine Konstante im Ort und in der Zeit ist:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 = \text{const.}$$

Bemerkung: Diese Definition der Homogenität impliziert bereits Inkompressibilität. Nach der Kontinuitätsgleichung folgt nämlich unmittelbar

$$0 = \partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Für ein homogenes, inkompressibles Fluid reduziert sich Gleichung (2.6) auf:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{v}.$$

Durch Einführen der *kinematischen Viskosität* $\nu = \mu/\rho_0$ erhält man die (homogenen) *zeitabhängigen, inkompressiblen* Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Dies ist nun ein System aus 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, d. h. es ist zu hoffen, dass das Gleichungssystem in einem entsprechenden formalen Rahmen wohldefiniert ist und eine eindeutige Lösung besitzt.

2.1.2 Randbedingung und viskose Kräfte

Bei der vorangegangenen Herleitung wurden zwei Fragestellungen offen gelassen. Die erste betrifft die Frage nach den konkreten Randbedingungen bei viskosen Fluiden.

Strömungsversuche zeigen, dass die Strömung durch die Viskosität am Rand vollständig abgebremst wird (vgl. Abschnitt 2.2). Wir fordern deshalb

$$\mathbf{v} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Diese Randbedingung („*no-slip*“-Bedingung) ist auch unabhängig von experimentellen Ergebnissen aus einer mathematischen Sichtweise heraus motiviert, um die korrekte Zahl an Randbedingungen für das Gleichungssystem (2.7) zu erhalten.

Die zweite Fragestellung betrifft die Kraft, die das viskose Fluid auf einen umströmten Körper oder den Rand des Strömungsgebiets ausübt. In der physikalischen Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen haben wir gesehen, dass die Kraft, die das Fluid auf ein infinitesimales Flächenstück am Ort (\mathbf{x}, t) mit der Normalen \mathbf{n} ausübt, mit Hilfe des Spannungstensors σ gegeben ist durch

$$\sigma(\mathbf{x}, t, \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}.$$

Man definiert:

Definition 2.3: Der *Strömungswiderstand* \mathcal{F} einer Strömung (\mathbf{v}, p) auf die Fläche Γ mit dem Normalenfeld \mathbf{n} ist definiert als diejenige Kraft, die das viskose Fluid auf Γ ausübt, d. h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{\Gamma} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{o} & (2.8) \\ &= \int_{\Gamma} \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{o} - \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \, d\mathbf{o}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Gelegentlich wird zwischen dem Druckwiderstand („*form drag*“),

$$- \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \, d\mathbf{o},$$

der die Kraft aufgrund der Druckverteilung angibt (und deshalb maßgeblich von der Form des Objektes abhängig ist) und dem Reibungswiderstand („*skin-friction drag*“),

$$\int_{\Gamma} \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{o},$$

unterschieden, der durch die Viskosität des Fluids hervorgerufen wird. Aus Implementierungsgründen (vgl. Abschnitt 3.3.3) werden wir auf eine solche Unterscheidung verzichten und ausschließlich den gesamten Strömungswiderstand (2.8) betrachten.

2.1.3 Reskalierung

Die bisher hergeleiteten (inkompressiblen) Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases}$$

sind dimensionsbehaftet. Um eine Aussage bezüglich der Ähnlichkeit verschiedener Strömungssituationen treffen zu können, reskaliert man die Gleichungen auf dimensionslose Größen (vgl. Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 4.1). Sei hierfür L eine charakteristische Länge des Strömungsproblems (z. B. die Breite eines Kanals oder die Länge eines umströmten Körpers) und V eine charakteristische Geschwindigkeit (z. B. eine Über- oder Umströmungsgeschwindigkeit). Man substituiert nun wie folgt auf dimensionslose Größen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \\ t &\longrightarrow t^* = \frac{tV}{L}, \\ \mathbf{v} &\longrightarrow \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{V}, \\ p &\longrightarrow p^* = \frac{p}{\rho_0 V^2}. \end{aligned}$$

Die Differentialoperatoren transformieren entsprechend:

$$\begin{aligned} \partial_t &\longrightarrow \partial_{t^*} = \frac{L}{V} \partial_t, \\ \nabla &\longrightarrow \nabla_* = L \nabla, \\ \Delta &\longrightarrow \Delta_* = L^2 \Delta. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen führt zu

$$\begin{cases} \partial_{t^*} \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla_*) \mathbf{v}^* + \nabla_* p^* - \frac{\nu}{LV} \Delta_* \mathbf{v}^* = 0, \\ \nabla_* \cdot \mathbf{v}^* = 0. \end{cases}$$

Man erkennt, dass zwei Strömungssituationen inkompressibler Fluide offenbar stets dann ein physikalisch ähnliches Verhalten zeigen, wenn sie zum einen geometrisch ähnlich sind (d. h. das gleiche reskalierte Strömungsgebiet besitzen) und zum anderen die Größe $\frac{VL}{\nu}$ in beiden Problemen übereinstimmt. Wir definieren deshalb:

Definition 2.4 (Reynoldszahl): Unter der *Reynoldszahl* versteht man die dimensionslose Größe

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}. \quad (2.9)$$

Bemerkung: Die Reynoldszahl ist gleichzeitig ein Maß für das Verhältnis von *kinematischen* zu *viskosen Kräften*,

$$\text{Re} = \frac{\text{„kinematische Kräfte“}}{\text{„viskose Kräfte“}}.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus einer Größenabschätzung der viskosen ($\sim \mu V/L^2$) und kinematischen ($\sim \rho_0 V^2/L$) Kräfte (vgl. Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 1.3).

Man kann dies auch direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen ablesen; unter der Vernachlässigung der Kennzeichnung mit * ergibt sich nämlich:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

2.2 Grenzschichttheorie

Bei Umströmungen mit niedriger Viskosität und deshalb großer Reynoldszahl beobachtet man, dass viskose Kräfte (d. h. innere Scher- oder Reibungskräfte) des Fluids nur in einer Region sehr nahe am Rand in Erscheinung treten. Etwas entfernt vom Rand kann ein großer Bereich der Strömung sehr gut als *ideales* (d. h. reibungsfreies) *Fluid* angenähert werden. Der Grund, warum dies nicht im gesamten Strömungsgebiet möglich ist, liegt im fundamentalen Unterschied der Randbedingungen zwischen viskosen und idealen Fluiden.

Wir haben gesehen, dass inkompressible, viskose Fluide die Navier-Stokes-Gleichungen (2.7) mit der Randbedingung

$$\mathbf{v} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

erfüllen. Dem gegenüber werden ideale Fluide, die durch das Verschwinden von Scherkräften, d. h. durch $\tilde{\sigma} = 0$ in Gleichung (2.4) charakterisiert sind, durch die *Eulerschen Gleichungen* beschrieben:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Aus einer physikalischen und mathematischen Sicht ist die richtige Randbedingung in diesem Fall

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Das Fluid soll also durch ein festes Randstück weder ein-, noch ausströmen. Im Gegensatz zum viskosen Fall muss aufgrund des Fehlens von Scherkräften allerdings die

Tangentialkomponente am Rand nicht verschwinden. Beide Fluidtypen zeigen also in unmittelbarer Randnähe ein fundamental anderes Strömungsverhalten.

Die Grundannahme der *Prandtlschen Grenzschichttheorie* ist nun, dass für Umströmungen bei hoher Reynoldszahl das Strömungsgebiet in zwei Regionen aufgespaltet werden kann (vgl. Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 2.1), und zwar in einen Bereich, in dem viskose Kräfte in sehr guter Näherung vernachlässigt werden können und die Strömung den Eulerschen Gleichungen genügt, und einer dünnen Grenzschicht am Rand, in der viskose Kräfte eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen.

In diesem Zusammenhang ist es günstig eine Größe als Maß für die auftretenden Scherkräfte am Rand zu definieren:

Definition 2.5 (Wandschubspannung): Unter der *Wandschubspannung* τ_w („wall-shear stress“) verstehen wir die vom Spannungstensor σ (vgl. Gleichung 2.5) in Hauptströmungsrichtung (\boldsymbol{x} -Richtung, vgl. Abb. 2.1) hervorgerufene Kraft auf einen glatten, in der (x, z) -Ebene gelegenen Rand, d. h.

$$\tau_w(x, z) = \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_y = \mu \partial_y v_x \Big|_{y=0}. \quad (2.11)$$

Eingehende experimentelle Untersuchungen haben die Prandtlsche Grenzschichttheorie in einer umfangreichen Zahl an Strömungssituationen bestätigt. Es sei auf die Zusammenstellungen in (Schlichting u. Gersten 2000) verwiesen.

Das Konzept der Grenzschichttheorie hat vor allem in der analytischen Behandlung von Umströmungsproblemen Einzug gehalten. Die Unterteilung in zwei verschiedene Strömungsregionen – eine viskose Grenzschicht und eine nicht viskose Überströmung – führt zu einer erheblichen Vereinfachung der theoretischen Behandlung, bzw. macht eine solche überhaupt erst möglich.

2.2.1 Laminare und turbulente Grenzschichten

Es treten zwei prinzipiell unterschiedliche Fälle von Grenzschichtströmungen auf. Eine Grenzschicht kann in Abhängigkeit von der Geometrie des Strömungsgebiets und der Überströmung einen *laminaren* oder einen *turbulenten* Charakter aufweisen.

Laminare Grenzschichten sind dadurch charakterisiert, dass sie eine laminare Schichtströmung ohne großen Massetransport zwischen unterschiedlichen Höhenbereichen aufweisen. Ein instruktives Beispiel für eine laminare Grenzschichtströmung ist die Umströmung einer in Strömungsrichtung orientierten Platte (vgl. Abb. 2.1).

Eine Größenabschätzung der auftretenden viskosen und kinematischen Kräfte liefert eine qualitative Aussage über die *Dicke* $\delta(x)$ *der laminaren Grenzschicht* in Abhängigkeit

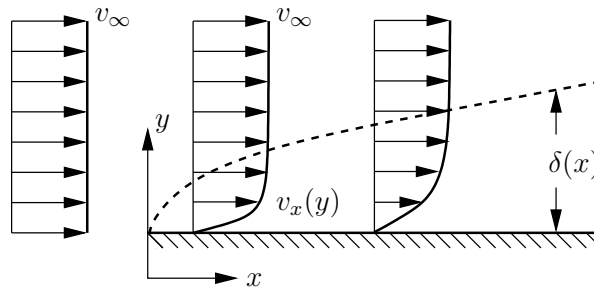


Abbildung 2.1: Laminare Grenzschicht einer in Strömungsrichtung orientierten und bei $x = 0$ beginnenden Platte: Eingezeichnet sind Strömungsprofile $v_x(x, y)$ und die Dicke $\delta(x)$ der laminaren Grenzschicht an verschiedenen Orten x .

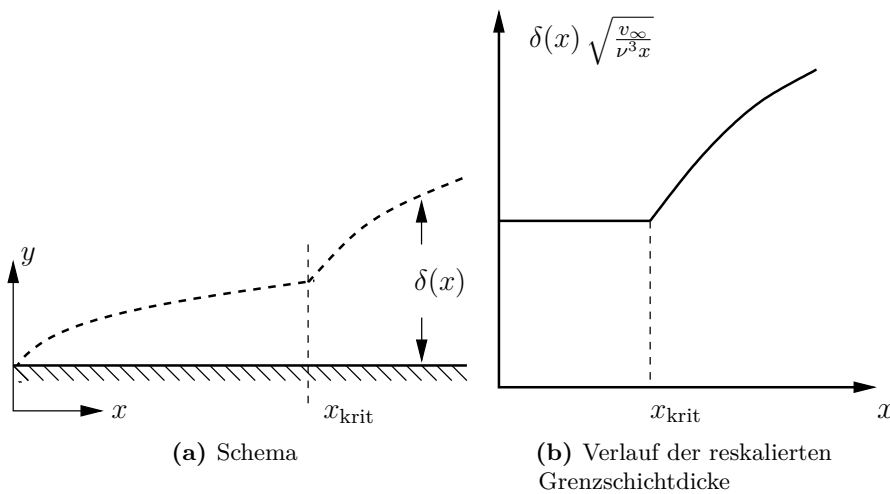


Abbildung 2.2: Turbulenter Umschlag einer laminaren Grenzschicht über einer geraden Platte anhand des Verlaufs der Grenzschichtdicke $\delta(x)$

von der Entfernung x von der Spitze und der Überströmungsgeschwindigkeit v_∞ (vgl. Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 2.2):

$$\delta(x) \sim \nu \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}. \tag{2.12}$$

Der Begriff der laminaren Grenzschichtdicke δ ist ein relatives Konzept, da der Übergang von der Grenzschichtströmung in die äußere Überströmung kontinuierlich erfolgt. Man kann δ z. B. als diejenige Höhe festlegen, ab der 99% der Überströmungsgeschwindigkeit v_∞ erreicht wird. (Ein solches δ wird üblicherweise mit δ_{99} bezeichnet.)

Trägt man nun ein experimentell bestimmtes δ durch $\nu \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$ normiert gegenüber x auf, erhält man den in Abb. 2.2 gezeigten Verlauf. Man sieht, dass die Grenzschichtdicke sich zunächst in guter Übereinstimmung mit (2.12) verhält, allerdings ab einem gewissen

Punkt ein qualitativ völlig anderes Verhalten zeigt. Dies ist gerade der Umschlag zu einer turbulenten Grenzschicht. Der Umschlag ist typischerweise durch eine starke Größenzunahme der Grenzschicht und der Wandschubspannung τ_w im Vergleich zur laminaren Grenzschicht gekennzeichnet (Schlichting u. Gersten 2000).

In einer turbulenten Grenzschicht liegt kein geordneter, laminarer Strömungsverlauf mehr vor. Vielmehr kommt es zu einem chaotischen Strömungsverlauf mit zeitlich und räumlich lokal auftretenden Wirbelbildungen, die zu einem großen Masse- und Energieaustausch verschiedener Höhenbereiche der Grenzschichtströmung führen. Vor allem die Durchmischung der langsamen Randschichten mit schnellen Fluidanteilen aus höheren Schichten ist letztendlich für den großen Zuwachs der Wandschubspannung τ_w verantwortlich.

Turbulente Grenzschichten lassen sich gegenüber laminaren in weitere Strömungsbereiche unterteilen. Von der Überströmung her kommend ist die Grenzschicht zunächst einmal durch ihre Turbulenz und die damit verbundenen Reibungskräfte gekennzeichnet. Der direkte Einfluss der Viskosität beschränkt sich aber auf einen wesentlich kleineren Bereich der Grenzschicht in unmittelbarer Wandnähe. Diese *viskose Unterschicht* („*viscous sublayer*“ oder auch „*viscous wall layer*“) ist durch ein von der Viskosität dominiertes und überwiegend laminares Strömungsverhalten gekennzeichnet, da durch den unmittelbaren Wandeinfluss die Turbulenz unterdrückt ist (Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 2.3).

Wir betrachten im Folgenden aufgrund der Turbulenz die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit \bar{v} und der Wandschubspannung $\bar{\tau}_w$. Die charakteristische Größenordnung der Geschwindigkeit in der turbulenten Grenzschicht ist gegeben durch die *Schubspannungsgeschwindigkeit*

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho_0}}. \quad (2.13)$$

Dies ergibt sich aus Dimensionsbetrachtungen und Aussagen der asymptotischen Analysis, wie in (Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 17.1) ausführlich dargestellt wird. Wir erwarten also, dass sich der reskalierte, zeitliche Mittelwert $\frac{1}{v_\tau} \bar{v}$ in Abhängigkeit von geeignet reskalierten Ortskoordinaten bei ähnlichen Strömungssituationen gleich verhält. Dies ist in der Tat der Fall, wie Strömungsexperimente gezeigt haben. Es stellt sich der in Abb. 2.3 gezeigte Verlauf der mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_x in Abhängigkeit von der reskalierten Höhe $y^+ = \frac{v_\tau}{\nu} y$ ein. Man definiert deshalb:

Definition 2.6: Unter der *viskosen Wandeinheit* δ_v („*viscous wall unit*“) versteht man die charakteristische Größenordnung

$$\delta_v = \frac{\nu}{v_\tau}. \quad (2.14)$$

Mit ihrer Hilfe werden die *charakteristischen Wandeinheiten* definiert:

$$y^+ = \frac{1}{\delta_v} y.$$

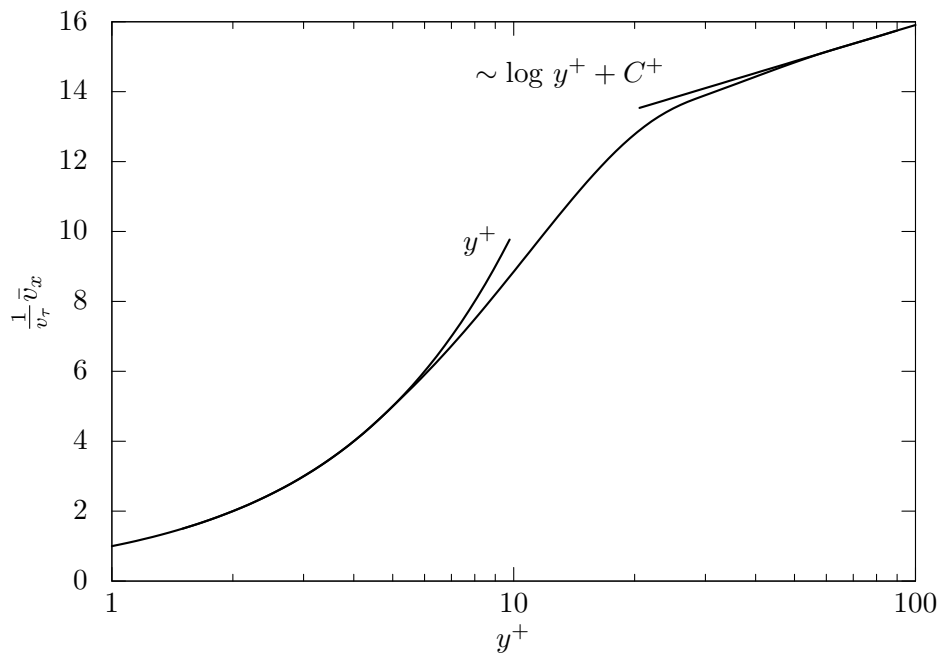


Abbildung 2.3: Verlauf des Mittelwertes der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung einer turbulenten Grenzschicht in Abhängigkeit von $y^+ = \frac{v_\tau}{\nu} y$ in Anlehnung an die in (Schlichting u. Gersten 2000, Fig. 17.3) vorgestellten Messergebnisse

Die turbulente Grenzschicht lässt sich nach Abb. 2.3 in 3 Strömungsregionen unterteilen; nämlich in die bereits eingeführte viskose Unterschicht mit überwiegend laminarem Strömungscharakter, einem *logarithmischen Bereich* mit ausgeprägter Turbulenz, in dem die mittlere Geschwindigkeit logarithmisch zum Wandabstand anwächst, sowie einem *Übergangsbereich* zwischen diesen beiden Strömungsregionen. Zusammenfassend:

Höhe $0 \leq y^+ \leq 5$: Die *viskose Unterschicht* („*viscous sublayer*“) ist charakterisiert durch einen großen Einfluss der Viskosität und durch die aufgrund des unmittelbaren Wandeinflusses unterdrückte Turbulenz. Für die mittlere Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung gilt

$$\bar{v}_x^+ = y^+.$$

Höhe $5 < y^+ \leq 70$: Es stellt sich ein *Übergangsbereich* („*buffer layer*“) zwischen viskoser Unterschicht und dem logarithmischen Bereich ein.

Höhe $70 < y^+$: Gegenüber der Überströmung zeichnet sich der *logarithmische Bereich* („*logarithmic layer*“) durch seinen ausgeprägten Turbulenzgrad aus. Seinen Namen verdankt er dem logarithmischen Anwachsen der mittleren Geschwindigkeit:

$$\bar{v}_x^+ \sim \log y^+ + C^+.$$

Für eine weitergehende Motivation dieser Einteilung mit Argumenten der asymptotischen Analysis sei auf (Schlichting u. Gersten 2000, Kapitel 17 u. 18) verwiesen.

2.2.2 Spezielle Wahl der Reskalierung

Im Kontext der Grenzschichttheorie bietet sich eine für die Betrachtung von Grenzschichtströmungen günstige, leicht modifizierte Wahl der Reskalierung der Strömungsgleichungen (2.7) an.

Wir sind bei der Simulation von Grenzschichten an Strömungsbereichen mit einer Höhe von einigen viskosen Wandeinheiten δ_v interessiert. Eine Reskalierung der Länge mit $\mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{\delta_v} \mathbf{x}$ in die oben definierten *charakteristischen Wandeinheiten* liegt also nahe. Die charakteristische Größenordnung der Geschwindigkeit ist laut Gleichung 2.13 gegeben durch die Schubspannungsgeschwindigkeit

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho_0}}.$$

Wir reskalieren mit diesen beiden Größenordnungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x}^+ = \frac{v_\tau}{\nu} \mathbf{x}, \\ t &\longrightarrow t^+ = \frac{v_\tau^2}{\nu} t, \\ \mathbf{v} &\longrightarrow \mathbf{v}^+ = \frac{\mathbf{v}}{v_\tau}, \\ p &\longrightarrow p^+ = \frac{p}{\rho_0 v_\tau^2}. \end{aligned}$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen reduzieren sich damit auf die vollständig parameterfreie Form

$$\begin{cases} \partial_{t^+} \mathbf{v}^+ + (\mathbf{v}^+ \cdot \nabla_+) \mathbf{v}^+ + \nabla_+ p^+ - \Delta_+ \mathbf{v}^+ = 0, \\ \nabla_+ \cdot \mathbf{v}^+ = 0. \end{cases}$$

Wir werden im Folgenden für die Simulation von Grenzschichtmodellen stets diese – in viskose Wandeinheiten reskalierte – dimensionslose Form der Navier-Stokes-Gleichungen benutzen. Dies hat den Vorteil, dass wir sofort die richtigen Größenordnungen für die Höhe und die Überströmungsgeschwindigkeit eines (in Kapitel 3 aufzustellenden) Grenzschichtmodelles nach Abb. 2.3 kennen. Zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit sei dabei auf die explizite Kennzeichnung mit + verzichtet, d. h. anstelle von \mathbf{x}^+ schreiben wir künftig kurz \mathbf{x} , etc. (Sollten doch einmal dimensionsbehaftete Zahlenwerte genannt werden, ist dies durch die Angabe der Einheit klar.)

Abschließend seien für die Reynoldszahl und den Strömungswiderstand noch zwei Bemerkungen festgehalten:

Definition 2.7: Die Reynoldszahl Re_τ ist die Reynoldszahl einer betrachteten Grenzschichtströmung mit Höhe H über dem Rand, die durch die charakteristischen Parameter $V = v_\tau$ und $L = H$ entsteht:

$$\text{Re}_\tau = \frac{v_\tau H}{\nu} = H^+. \quad (2.15)$$

D. h. diese ist gleich der Höhe H^+ der simulierten Grenzschicht in viskosen Wandeinheiten.

Bemerkung: Die Kraft wird auf folgende Größe reskaliert:

$$\mathcal{F} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{F}^+ = \frac{\nu^2}{\rho_0 v_\tau^4} \mathcal{F}.$$

Es ergibt sich somit

$$\mathcal{F}^+ = \int_\Gamma (\nabla_+ \mathbf{v}^+ + \nabla_+ \mathbf{v}^{+T}) \cdot \mathbf{n} \, \text{d}o^+ - \int_\Gamma p^+ \mathbf{n} \, \text{d}o^+. \quad (2.16)$$

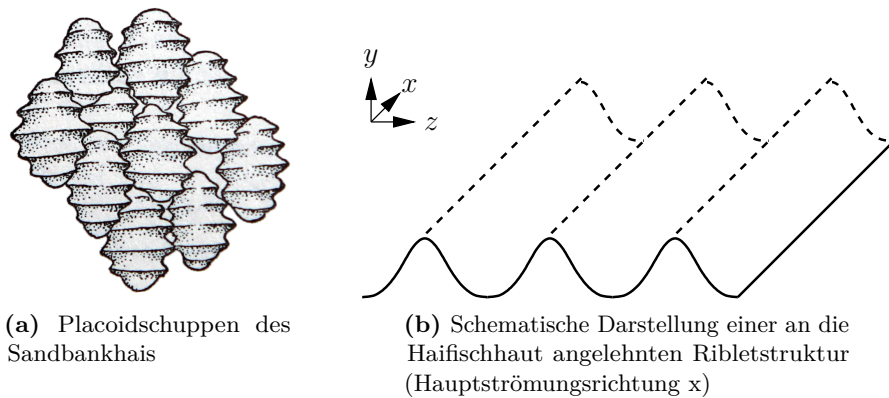


Abbildung 2.4: Bei Haien auftretende Ribletstrukturen auf den Placoidschuppen und schematisches Modell

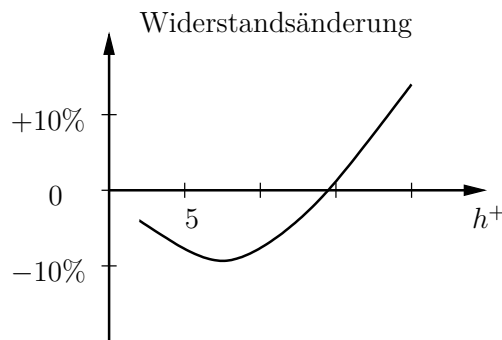


Abbildung 2.5: Qualitatives Verhalten der Strömungswiderstandsänderung in Abhängigkeit von der Riblethöhe nach Bechert u. a. (2000): Ein Optimum stellt sich im Bereich $h^+ = 6 - 9$ ein.

2.3 Physikalische Wirkungsweise von Riblets

Unter Ribletstrukturen versteht man kleine, in Hauptströmungsrichtung orientierte, regelmäßige Oberflächenstrukturen mit einer charakteristischen „Rillenform“ (Abb. 2.4). Solche Strukturen findet man auf den Placoidschuppen einer Vielzahl von vor allem schnell schwimmenden Haispezien (vgl. Bechert u. a. 2000). Insbesondere fällt auf, dass diese in Bereichen mit sehr hohen Strömungswiderständen, wie z. B. der Schwanzflosse, hochgradig geordnet in Strömungsrichtung verlaufen. Der Verdacht liegt also nahe, dass Ribletstrukturen dieser Form widerstandsoptimierende Eigenschaften für turbulente Überströmungen (wie sie bei schnell schwimmenden Haien auftreten) besitzen.

In der Tat haben umfangreiche Strömungsexperimente in Luft-, Wasser- und Ölkanälen im Falle einer turbulenten Überströmung eine Widerstandsverbesserung im Vergleich zum glatten Rand von bis zu 10 % ergeben. Es sei unter anderem auf die Arbeiten von Bechert u. a. (1985, 1997, 2000) und Walsh (1983) verwiesen. Es hat sich gezeigt, dass

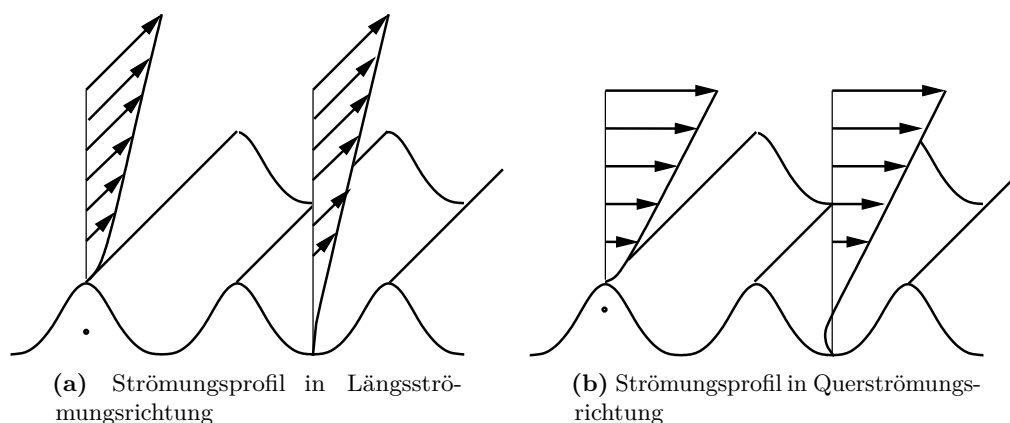


Abbildung 2.6: Laminare Strömungsprofile in Haupt- und Querströmungsrichtung über einer Ribletgeometrie: Die unterschiedlichen Eindringtiefen der Strömungskomponenten sind durch den jeweiligen Ursprung des Strömungsprofils gut erkennbar.

ein Verhältnis von Breite zu Höhe der Ribletstruktur von 2 : 1 ideal ist (Bechert u. a. 2000; Friedmann 2005). Bezüglich der Höhenabhängigkeit der Widerstandsverbesserung ergibt sich das in Abb. 2.5 gezeigte qualitative Verhalten. Eine optimale Ribletthöhe liegt im Bereich $h^+ = 6 - 9$. Widerstandsoptimierende Ribletstrukturen ragen also aus der viskosen Unterschicht heraus und bis in den Bufferlayer hinein. Ribletstrukturen kleinerer Höhe zeigen einen deutlich geringeren Effekt der Widerstandsverbesserung; bei Ribletstrukturen mit deutlich größerer Höhe beobachtet man hingegen ab einem gewissen Punkt eine deutliche Widerstandszunahme.

Es stellt sich an dieser Stelle die Frage nach dem Mechanismus der Widerstandsverbesserung der periodischen Oberflächenrauheiten. Hierzu betrachten wir die in Abb. 2.6 gezeigten Strömungsprofile. Man sieht, dass es der Strömungskomponente in Hauptströmungsrichtung möglich ist, tiefer in die Ribletstruktur einzudringen als dies die Komponente in Querströmungsrichtung vermag. Der Ursprung des Strömungsprofils in Strömungsrichtung liegt deutlich tiefer als der der Querströmungsrichtung, welcher sich wesentlich näher an den Ribletspitzen befindet. Dies führt in einer turbulenten Grenzschicht (bei entsprechend dimensionierten Riblets) zu einem Umlenken der viskosen Unterschicht in die Hauptströmungsrichtung und dadurch (durch einen somit erhöhten Widerstand in der Querströmungsrichtung) zu einer Abschwächung der Querströmungskomponente (vgl. Bechert u. a. 2000; Friedmann u. Richter 2007; Walsh 1983) und damit zu einer besseren Anströmung in die gewünschte Hauptströmungsrichtung.

Ein weiterer Effekt stellt sich aufgrund der Beeinflussung von longitudinalen Wirbeln senkrecht zur Hauptströmungsrichtung in Wandnähe durch die Riblets ein. Diesen wird aufgrund des starken Mischens von schnellen Strömungsanteilen in die viskose Unterschicht ein Hauptbeitrag zur Widerstandserhöhung turbulenter Grenzschichten im Vergleich zum laminaren Fall zugesprochen. Sie werden durch die Ribletstrukturen nun nach oben verschoben (vgl. Abb. 2.7), wodurch eine turbulente Durchmischung der

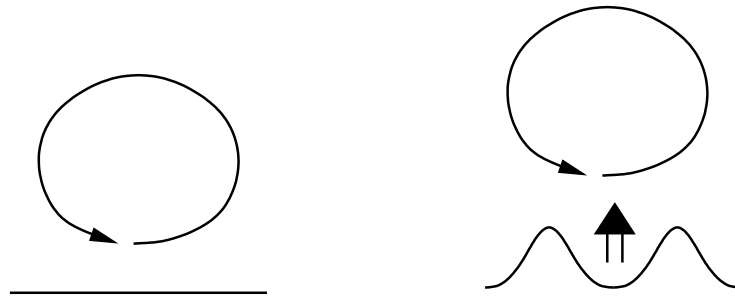


Abbildung 2.7: Ribletstrukturen verschieben longitudinale Wirbel nach oben

viskosen Unterschicht vermindert und in letzter Konsequenz durch das Anheben der Wirbel die viskose Unterschicht vergrößert wird. Dies führt zu einer Widerstandsverminderung.

Bemerkung: Bei den in der Einleitung angesprochenen Noppenstrukturen können die vorgestellten Effekte der Widerstandsverminderung nicht auftreten, da geometriebedingt keine Auszeichnung der Hauptströmungsrichtung gegenüber der Querströmungsrichtung auftritt, wie es bei Ribletstrukturen der Fall ist. Ein Vergleich dieser beiden Geometrien in dem im nächsten Kapitel vorgestellten stationären Modell ist deshalb von großem Interesse.

3 Ein stationäres Modell

In diesem Kapitel entwickeln wir ein stationäres Modell zur Beschreibung der Wirkungsweise von Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht. Simuliert wird hierbei eine laminare Strömung über Ribletstrukturen der Höhe $h^+ = 0.15$.

Mit dem stationären Modell ist es möglich grundlegende Mechanismen der Widerstandsreduktion von Ribletstrukturen, wie das im vorangegangenen Kapitel erläuterte Umlenken der Überströmung in die Hauptströmungsrichtung, zu beobachten und wichtige Kenngrößen, wie die Eindringtiefe einer Struktur, quantitativ zu ermitteln.

3.1 Modellformulierung

Ribletstrukturen, die in Natur und Technik zu einer Widerstandsoptimierung führen, haben typischerweise eine Höhe von $h^+ = 6 - 9$; dies entspricht z. B. beim Hai einer Strukturgröße von $0.01 - 0.1$ mm (Steuben u. Krefft 1995). Das gesamte Umströmungsgebiet des Hais hat allerdings eine Größenordnung von einigen Metern. D. h. das Auflösen von Ribletstrukturen mit turbulenten Modellen, stellt ein enormes Skalenproblem dar und ist in der Regel mit einem nicht zu bewältigenden Rechenaufwand verbunden. Darüber hinaus müssen die numerischen Simulationen in der Lage sein, gleichzeitig sowohl den hoch turbulenten Charakter der Überströmung (Reynoldszahlen im Bereich $10^6 - 10^7$) als auch den laminaren Charakter der viskosen Unterschicht korrekt darzustellen.

Für eine turbulente, zeitabhängige Umströmung gestaltet sich weiterhin die analytische Behandlung von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sehr schwierig, da notwendige Kleinheitsbedingungen der Geschwindigkeit bei turbulenten Strömungen nicht erfüllt sind (vgl. Temam 2001). Es liegt deshalb nahe, sich bei der Simulation von Ribletstrukturen auf eine Skala einzuschränken. Gewöhnlich fällt hierbei die Wahl auf eine Simulation der turbulenten Überströmung, bei der auf eine volle Auflösung der Ribletstrukturen verzichtet wird – vor allem, wenn die benutzten Verfahren erhebliche Einschränkungen der möglichen Form des Simulationsgebietes bedingen (z. B. *Lattice-Boltzmann-Verfahren*).

In dieser Arbeit soll analog zu (Friedmann 2005) die entgegengesetzte Richtung eingeschlagen werden. Wir möchten uns in diesem Kapitel zunächst auf eine Simulation der Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht beschränken. Wir simulieren eine stationäre Strömung über eine Ribletstruktur der Breite $\varepsilon = 0.3$ und Höhe $h = \varepsilon/2 = 0.15$. Das

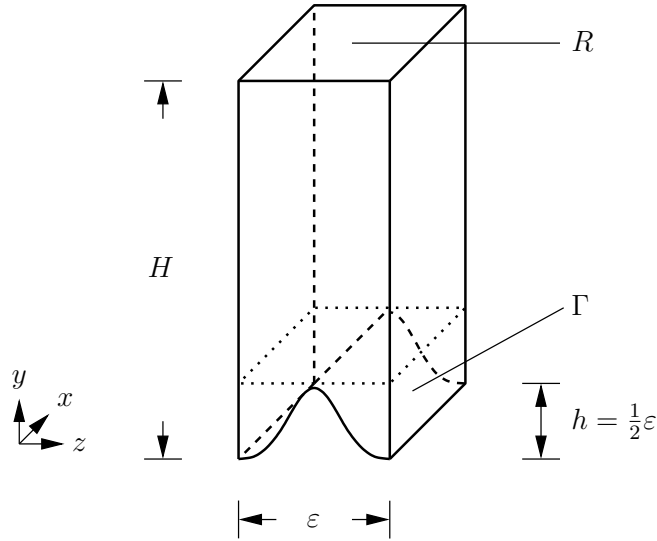


Abbildung 3.1: Die Einheitszelle Ω : Auf der rauen Oberfläche Γ seien Nullrandwerte und auf R eine konstante Überströmung vorgegeben

Simulationsgebiet (Abb. 3.1) sei dabei eine viskose Wandeneinheit δ_v hoch, d. h. $H = 1$. Friedmann (2005) schlägt nun das folgende Modell einer stationären, periodischen Strömung über Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht vor:

Definition 3.1 (Stationäres Modell, starke Formulierung): Gegeben sei eine Einheitszelle Ω (Abb. 3.1) mit vorgegebener, räumlich konstanter Überströmung \mathbf{V} auf R und einer rauen Oberfläche Γ .

Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld sowie ein skalarer Druck

$$\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_{\text{per}}^1(\Omega)^3, \quad p \in H_{\text{per}}^1(\Omega) / \mathbb{R},$$

mit zusätzlicher Periodizität von $\nabla \mathbf{v}$ in Normalenrichtung, d. h.

$$[\nabla \mathbf{v}]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \text{ in } L^2(\Gamma_i)^3$$

für jede periodische Randkomponente Γ_i von Ω mit der Normalen \mathbf{n} , so dass die *inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen* erfüllt sind:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{auf } \Gamma, \\ \mathbf{v} = \mathbf{V} & \text{auf } R. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Eine Definition der Räume, sowie eine Erläuterung der verwendeten Notation ist in der Einleitung zu finden.

Bemerkung: Es sei daran erinnert, dass wir stets in den in Abschnitt 2.2.2 eingeführten viskosen Wandeinheiten rechnen.

Für Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sei auf Proposition 3.2 in Abschnitt 3.3.1 verwiesen. Eine Lösungstheorie des (linearen) Stokes-Problems ist in Abschnitt A.2 des Anhangs zu finden.

3.2 Aussagekraft und Limitierung

Der entscheidende Vorteil dieses Modells liegt in der analytischen Handhabbarkeit. Für moderate Reynoldszahlen gibt es Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen (Prop. 3.1). Der Spezialfall eines geraden, glatten Rands Γ besitzt eine bekannte eindeutige, analytische Lösung – es ergibt sich schlicht die Couette-Strömung.

Es wurden weiterhin von Jäger u. Mikelić (1996, 2001, 2003) eine Homogenisierungstheorie entwickelt und von Friedmann (2005) auf den Fall von Ribletstrukturen ausgebaut, die es erlaubt, im Grenzfall kleiner Mikrostrukturen das Modell (3.1) durch ein System mit künstlichem, glattem Rand mit modifizierten Randbedingungen zu approximieren. Dies soll in Kapitel 4 zur Anwendung gebracht werden.

Darüber hinaus ist (3.1) durch den rein laminaren Charakter und aufgrund der Tatsache, dass Ω aufgrund der Periodizität der gesuchten Strömung sehr klein gewählt werden kann – es genügt eine einzige Einheitszelle aufzulösen –, numerisch direkt berechenbar. Eine gegenüber dem Rechenggebiet hinreichend große, periodische Rauheit Γ kann hierbei gut aufgelöst werden.

Mit dem Modell gehen allerdings einige nicht zu unterschätzende Probleme einher. Zu erwähnen ist zunächst einmal eine gewisse Diskrepanz zur physikalischen Realität. Strömungsversuche haben gezeigt, dass Ribletstrukturen, die überhaupt zu großer Widerstandsverminderung führen, bis in den Bufferlayer reichen (d.h. eine Höhe von $h^+ = 6 - 9$ besitzen). Dem gegenüber führen Riblets, die auf die viskose Unterschicht beschränkt sind, zu sehr kleinen Widerstandsänderungen, die in der Praxis nicht relevant sind. Die hier vorgestellte Geometrie hat eine Höhe von $h^+ = 0.15$ und liegt somit vollständig in der viskosen Unterschicht.

Aufgrund der fehlenden Zeitabhängigkeit und der fehlenden Turbulenz der modellierten Strömung, sind die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Effekte der Beeinflussung einer turbulenten Grenzschicht schwer erkennbar.

Weiterhin stellt die fehlende direkte Vergleichbarkeit der numerischen Ergebnisse zwischen verschiedenen Oberflächenstrukturen eine große Herausforderung dar; insbesondere im interessanten Fall des Vergleichs von Riblets mit dem glatten Rand. Der Grund hierfür liegt im Festschreiben der Höhe des modellierten Ausschnitts der viskosen Unterschicht in (3.1) auf $H = 1$ und der gleichzeitigen Vorgabe einer festen Überströmung

\mathbf{V} auf R bei dieser Höhe. Wird nun die periodische Rauheit in Höhe oder Form variiert, so ändert sich der Strömungswiderstand empfindlich.

In der Realität wird sich die Höhe δ der viskosen Unterschicht und damit der korrekte Wert der Überströmung V bei einer Höhe von $H = 1$ aufgrund des Einflusses der Oberflächenstruktur auf die turbulente Überströmung für jede periodische Rauheit unterschiedlich einstellen. Mit dem vorgestellten Modell kann dies allerdings nicht simuliert werden. Dies ist in so weit gravierend, als dass hiermit die errechneten Widerstandswerte unterschiedlicher periodischer Rauheiten a priori nicht untereinander (und insbesondere nicht mit dem glatten Rand) vergleichbar sind. Das Problem der Vergleichbarkeit dieses Modells wird in Abschnitt 3.6 behandelt werden.

3.3 Direkte numerische Simulation

In einem ersten Schritt soll das Modell (3.1) für ausgewählte, periodische Rauheiten numerisch direkt simuliert werden. Die Berechnung erfolgt hierbei mit Hilfe des am Lehrstuhl Numerische Mathematik in Heidelberg entwickelten *Finite-Elemente-Toolkits* GASCOIGNE¹.

In diesem Abschnitt wird deshalb eine kurze Zusammenfassung der Finite-Elemente-Methode gegeben und auf einige Implementierungsaspekte eingegangen.

3.3.1 Variationelle Formulierung

Zur Behandlung des stationären Modells mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ist es notwendig, die starke Formulierung (3.1) zunächst in eine geeignete variationelle Form zu überführen. Zur besseren Notation seien zunächst folgende Funktionenräume (bzw. affin verschobene Funktionenmannigfaltigkeiten) definiert:

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma, \mathbf{v} = 0 \text{ auf } R \right\}, \\ \hat{V} &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma, \mathbf{v} = \mathbf{V} \text{ auf } R \right\}, \\ Q &:= L^2(\Omega) / \mathbb{R}, \text{ sowie} \\ X &:= V \times Q, \\ \hat{X} &:= \hat{V} \times Q. \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung der Gleichungen (3.1) lautet nun:

¹GASCOIGNE. High Performance Adaptive Finite Element Toolkit, <http://www.gascoigne.de/>

Definition 3.2 (Stationäres Modell, schwache Formulierung): Gesucht ist eine Lösung $u = (\mathbf{v}, p) \in \hat{X}$ des Systems

$$\begin{cases} a(u, \Phi) = 0 \quad \forall \Phi = (\boldsymbol{\varphi}, \xi) \in X, \\ a(u, \Phi) = ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) + (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) - (p, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, \xi). \end{cases} \quad (3.2)$$

Proposition 3.1 (Existenz und Eindeutigkeit): Angenommen es ist $|\mathbf{V}|H < 2$, $\varepsilon < H/2$ und der Rand Γ ist durch einen C^2_{per} -Graphen gegeben. Dann besitzt das System (3.2) eine Lösung. Ist darüber hinaus ε gegenüber der Höhe H hinreichend klein, d. h. $\varepsilon < C(H)$ so ist die Lösung eindeutig.

Beweis: Der Beweis dieser Aussage wird in Abschnitt 4.1 auf Seite 65 im Rahmen der dort entwickelten Homogenisierungstheorie geführt. \square

Bemerkung: Für Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen des Stokes-Problems sei auf Abschnitt A.2 des Anhangs verwiesen.

Proposition 3.2 (Äquivalenz): Die variationelle Formulierung (3.2) und die starke Formulierung (3.1) sind äquivalent:

Jede Lösung (\mathbf{v}, p) der variationellen Formulierung (3.2) hat sogar die Regularitätsstufe

$$(\mathbf{v}, p) \in H^2(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)$$

und ist gleichzeitig eine Lösung von (3.1), d. h. insbesondere ist bereits $p \in H^1_{\text{per}}(\Omega)$.

Umgekehrt ist eine Lösung (\mathbf{v}, p) der starken Formulierung (3.1) auch eine Lösung der variationellen Formulierung (3.2).

Beweis: Sei $(\mathbf{v}, p) \in H^1_{\text{per}}(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) / \mathbb{R}$ eine Lösung von (3.2). Diese besitzt nach Proposition 4.1 in Abschnitt 4.1 bereits die Regularität

$$(\mathbf{v}, p) \in H^2(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) / \mathbb{R}.$$

Partielles Integrieren von (3.2) liefert

$$\begin{aligned} ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) + \int_{\partial\Omega} \partial_n \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma - (\Delta \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) \\ - \int \mathbf{p} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma + (\nabla p, \boldsymbol{\varphi}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, \xi) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt also aufgrund des getrennten Testens mit $\varphi \in V$ und $\xi \in Q$:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \int_{\partial\Omega} (\partial_n \mathbf{v} - p \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma = 0 & \forall \boldsymbol{\varphi} \in V. \end{cases} \quad (3.3)$$

Da das Randintegral in (3.3) mit periodischen Funktionen aus V getestet wird, ist diese Gleichung äquivalent dazu, dass die Spuren $(\partial_n \mathbf{v} - p \mathbf{n})$ auf gegenüberliegenden periodischen Rändern antiparallel sein müssen. (Würde mit dem vollen $H^1(\Omega)^3$ getestet, so ergäbe sich, dass die Spur auf jeder periodischen Randkomponente identisch verschwinden müsste.) Dies können wir mit Hilfe des Sprungs $[\cdot]$ auch als Integral über eine periodische Randkomponente Γ_i beschreiben:

$$\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\varphi} \cdot [\nabla \mathbf{v} - p \mathbf{1}] \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Gamma_i)^3. \quad (3.4)$$

Weiterhin existiert, da $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)$, die Spur der Ableitung $\nabla \mathbf{v}|_{\Gamma_i} \in L^2(\Gamma_i)^9$. Aufgrund der Stetigkeit des Spuoperators überträgt sich die Inkompressibilität $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ in Ω auf den Rand Γ_i , d. h. $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$ in $L^2(\Gamma_i)$.

Seien nun \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 zwei Tangentialfelder, so dass $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ in jedem Punkt auf Γ_i ein Orthonormalsystem bildet. (Aufgrund des betrachteten Gebietes Ω ist eine solche Wahl stets möglich.) Man macht sich leicht klar, dass aus der Divergenzfreiheit auf dem Rand Γ_i durch Rotation auf das Orthonormalsystem $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ die Gleichung

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t}_1 \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_2 \equiv 0$$

auf Γ_i folgt. Das Vorzeichen der Kontraktion $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ist unabhängig von der Orientierung von \mathbf{n} , so dass der Sprung darüber wohldefiniert ist:

$$[\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_i} + [\mathbf{t}_1 \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_1]_{\Gamma_i} + [\mathbf{t}_2 \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_2]_{\Gamma_i} \equiv 0. \quad (3.5)$$

Da $\mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3$, folgt $[\mathbf{v}]_{\Gamma_i} \equiv 0$ in $L^2(\Gamma_i)^3$ und damit für Ableitungen in *Tangentialrichtung*

$$0 \equiv \partial_{\mathbf{t}_j} [\mathbf{v}]_{\Gamma_i} = \left[\partial_{\mathbf{t}_j} \mathbf{v} \right]_{\Gamma_i} = [\nabla \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{t}_j \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Dies impliziert, dass auch die vollen Kontraktionen $\mathbf{t}_j \cdot [\nabla \mathbf{v}]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{t}_j \equiv 0$ sind und somit aufgrund (3.5):

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{v}]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n} \equiv 0. \quad (3.6)$$

Aus dem Randintegral in (3.4) folgt durch entsprechendes Testen in \mathbf{n} -, \mathbf{t}_1 -, bzw. \mathbf{t}_2 -Richtung:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{n}]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n} - [p]_{\Gamma_i} &\equiv 0 & \text{in } L^2(\Gamma_i), \\ \mathbf{t}_1 \cdot [\nabla \mathbf{n}]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n} &\equiv 0 & \text{in } L^2(\Gamma_i), \\ \mathbf{t}_2 \cdot [\nabla \mathbf{n}]_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{n} &\equiv 0 & \text{in } L^2(\Gamma_i). \end{aligned}$$

In Kombination mit (3.6) ergibt sich schließlich

$$[p]_{\Gamma_i} \equiv 0 \quad \text{in } L^2(\Gamma_i).$$

Dies bedeutet, dass die Spurwerte des Drucks p auf gegenüberliegenden periodischen Rändern identisch sein müssen. Damit ist nach Proposition 1.1 aber $p \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$.

Umgekehrt ist jede Lösung $(\mathbf{v}, p) \in (H^2(\Omega)^3 \cap H_{\text{per}}^1(\Omega)) \times H_{\text{per}}^1(\Omega) / \mathbb{R}$ von (3.1) mit

$$\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\varphi} \cdot [\nabla \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Gamma_i)^3$$

auch automatisch eine Lösung von (3.2), was man durch Testen von (3.1) mit $(\boldsymbol{\varphi}, \xi) \in X$ und partieller Integration direkt nachprüft. Es bleibt anzumerken, dass der – bei der partiellen Integration entstehende – Randterm

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_n \mathbf{v} - p\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma$$

verschwindet: auf R und Γ aufgrund der Wahl von $\boldsymbol{\varphi} \in V$, und auf den periodischen Rändern aufgrund der Periodizität der Testfunktionen $\boldsymbol{\varphi}$, des Druckes p , sowie von $\nabla \mathbf{v}$ in Normalenrichtung. \square

3.3.2 Formulierung als Galerkinverfahren

Für die approximative Lösung von (3.2) wird ein stabilisierter, isoparametrischer *Finite-Elemente-Ansatz* mit Q^2 -Elementen verwendet. Dies führt zu einer Wahl

$$\begin{aligned} \hat{X}_h &= \hat{V}_h \times Q_h && \subset && \hat{X}, \\ X_h &= V_h \times Q_h && \subset && X \end{aligned}$$

an endlichdimensionalen Unterräumen für Ansatz- und Testraum auf denen dann das folgende diskrete Problem gelöst wird (Rannacher 2006):

Definition 3.3 (Stationäres Modell, diskrete Formulierung): Gesucht ist eine diskrete Lösung $u_h = (\mathbf{v}_h, p_h) \in \hat{X}_h$ von

$$a(u_h, \Phi_h) = 0 \quad \forall \Phi_h \in X_h. \quad (3.7)$$

Das Ziel hierbei ist durch eine geeignete Wahl von Unterräumen \hat{X}_h, X_h zum einen die eindeutige Lösbarkeit von (3.7) zu erreichen und zum anderen eine Konvergenz der diskreten Lösungen u_h gegen die Lösung u von (3.2) sicher zu stellen,

$$u_h \longrightarrow u \quad \text{für } h \longrightarrow 0. \quad (3.8)$$

Ein solches Vorgehen ist allgemein unter der Bezeichnung *Galerkin-Verfahren* bekannt.

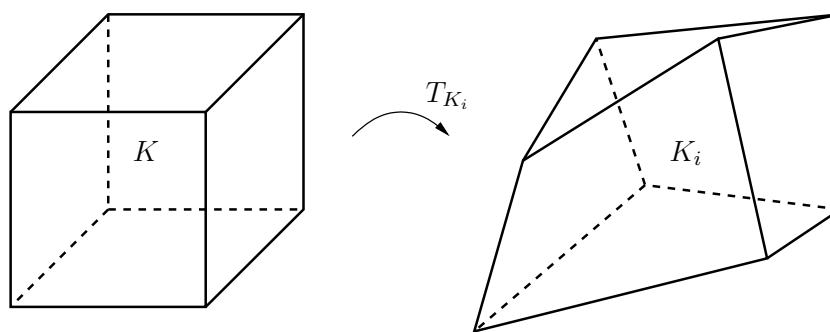


Abbildung 3.2: Transformation T_{K_i} der Referenzzelle \hat{K} auf eine Zelle K_i des Gitters

Wahl der Diskretisierung

Zur Konstruktion der diskreten Unterräume wird der Rechenbereich $\bar{\Omega}$ mit offenen Hexaedern K_i überdeckt, die mittels einer (noch zu definierenden) Transformation

$$T_{K_i} : \hat{K} \longrightarrow K_i$$

aus der Referenzzelle $\hat{K} = (0, 1)^3$ hervorgehen (vgl. Abb. 3.2), und zusammen das Gitter $\mathbb{T}_h = \{K_i : i = 1, \dots, N\}$ bilden. Man definiert den Parameter h gewöhnlich als den größten Durchmesser eines Hexaeders des Gitters,

$$h := \max_{i=1, \dots, N} \text{diam}(K_i).$$

An das Gitter stellt man nun eine Reihe von Regularitätsforderungen (Rannacher 2006):

Definition 3.4 (Strukturregularität): Ein Gitter \mathbb{T}_h heißt (struktur-) regulär, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i.) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathbb{T}_h} \bar{K}$,
- ii.) $K_1 \cap K_2 = \emptyset \quad \forall K_1, K_2 \in \mathbb{T}_h \text{ mit } K_1 \neq K_2$,
- iii.) Jede Seite eines Hexaeders stimmt entweder komplett mit einer Seite eines anderen Hexaeders überein, oder ist eine Teilmenge des Rands $\partial\Omega$.

Es stellt sich heraus, dass diese Regularitätsdefinition sowohl für die Approximation gekrümmter Ränder als auch für eine lokale Verfeinerung (bei der nicht alle Hexaeder simultan verfeinert werden) zu restriktiv ist. Das Problem gekrümmter Ränder löst man, indem man Bedingung (i.) lockert und in (iii.) erlaubt, dass im zweiten Fall nur die Ecken eines Hexaeders auf $\partial\Omega$ liegen müssen.

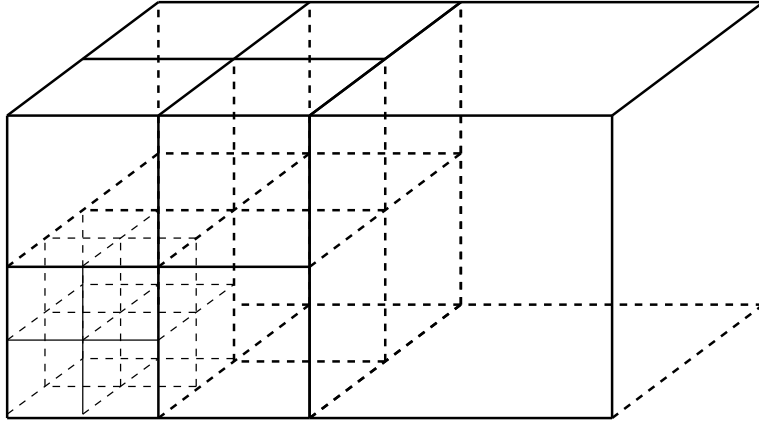


Abbildung 3.3: Eine lokale Verfeinerung bei Hexaedern benötigt das Konzept von hängenden Knoten auf Kanten und Flächen

Um eine lokale Verfeinerung zu ermöglichen führt man das Konzept der *hängenden Knoten* ein (vgl. Abb. 3.3). Hierbei erlaubt man, dass auf Kanten und Flächen der Hexaeder jeweils genau eine Ecke einer benachbarten Zelle zum Liegen kommen darf. Die entstehenden Freiheitsgrade werden durch Interpolationsbedingungen eliminiert. Genauer zu diesen beiden Konzepten ist in (Carey u. Oden 1984) zu finden.

Auf \hat{K} wird nun der Ansatzraum

$$\hat{Q}_h^2(\hat{K}) := \text{span} \left\{ \prod_{i=1}^3 \hat{x}_i^{\alpha_i} : \alpha_i \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

und mit diesem

$$Q_h^2(\Omega) := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \forall K \in \mathbb{T}_h \exists \hat{v} \in \hat{Q}_h^2(\hat{K}) \text{ mit } v|_K \circ T_K = \hat{v} \right\} \quad (3.9)$$

definiert. Die Transformationen T_K seien hierbei vom gleichen Ansatzgrad, d. h.

$$T_K \in Q_h^2(\hat{K}).$$

Eine solche Wahl der Transformation wird *isoparametrisch* genannt.

Man identifiziert nun eine Zelle \hat{K} mit den Freiheitsgraden der *Knoteninterpolierenden* auf ihr (vgl. Abb. 3.4). Zu einer Vorgabe von Funktionswerten in diesen Punkten existiert stets exakt ein Element aus $Q_h^2(\Omega)$, welches diese Vorgabe erfüllt. Bei den hier vorgestellten Q^2 -Elementen liegen Freiheitsgrade auf den Kanten- und Flächenmitten der Hexaeder.

Mit der Wahl einer isoparametrischen Transformation wird sichergestellt, dass diese Freiheitsgrade bei gekrümmten Rändern ebenfalls entsprechend auf den Rand verschoben werden. Zusammen mit einer gleichzeitigen Anpassung von inneren Freiheitsgraden (vgl. Abb. 3.4) stellt dies eine optimale Approximationsordnung des Rands sicher. Eine

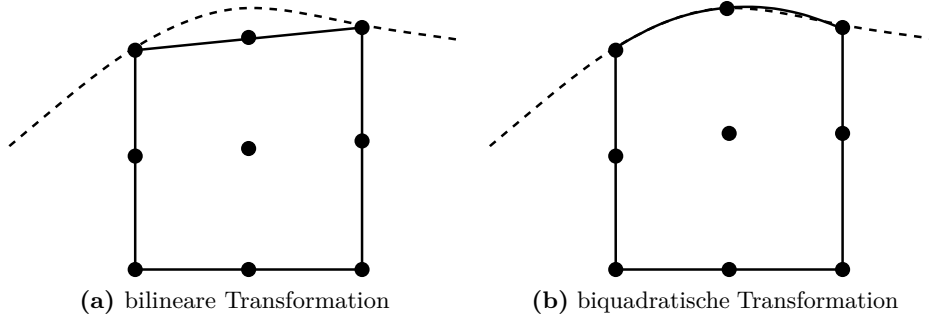


Abbildung 3.4: Eine isoparametrische Transformation führt zu einer optimalen Verteilung der Freiheitsgrade einer Q^2 -Zelle K_i am Rand des Simulationsgebietes Ω

genaue Darstellung dieses Sachverhaltes ist in (Carey u. Oden 1984) und (Schmich 2009, Kapitel 3.2) zu finden.

Damit setzt man

$$\hat{X}_h = \hat{X} \cap \left(Q_h^2(\Omega)^3 \times Q_h^2(\Omega) \right), \text{ bzw.}$$

$$X_h = X \cap \left(Q_h^2(\Omega)^3 \times Q_h^2(\Omega) \right).$$

Um eine Approximationseigenschaft der diskreten Unterräume \hat{X}_h, X_h an \hat{X} bzw. X zu erhalten, ist es notwendig, zusätzlich noch eine weitere Regularitätseigenschaft an das Gitter zu fordern. In Anlehnung an (Apel 1999, Kapitel 2.5.1) formulieren wir:

Definition 3.5 (Formregularität): Ein Familie $\{\mathbb{T}_h\}_h$ an Gittern heißt *formregulär*, falls es positive Konstanten κ und δ , sowie ein positives $c < \pi/2$ gibt, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- i.) Mit der Definition $h_K := \text{diam}(K)$, sowie ρ_K als den Durchmesser der größten ganz in \bar{K} liegenden Kugel gilt

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \kappa \quad \forall K \in \bigcup_h \mathbb{T}_h.$$

- ii.) Für jeden *Innenwinkel* α_i eines jeden Hexaeders $K \in \cup_h \mathbb{T}_h$ gilt

$$\frac{\pi}{2} - c \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2} + c.$$

- iii.) Für je zwei benachbarte Hexaeder K_1 und K_2 einer Gitterhierarchie \mathbb{T}_h gilt stets

$$\frac{\text{diam}(K_1)}{\text{diam}(K_2)} \leq \delta \quad \text{und} \quad \frac{\text{diam}(K_2)}{\text{diam}(K_1)} \leq \delta.$$

Dies erlaubt uns nun eine Reihe von Interpolationsabschätzungen zu formulieren. Eines der klassischen Resultate ist:

Proposition 3.3: Die oben beschriebene Knoteninterpolierende I_h ist auf dem Raum der stetigen Funktionen wohldefiniert, $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow Q_h^2(\Omega)$, und erfüllt die Abschätzung

$$|u - I_h u|_{H^j(\Omega)} \leq C h^{m-j} \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

für $u \in H^m(\Omega)$ mit $m = 2, 3$ und $0 \leq j \leq m$ und einer festen Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Es ist möglich verallgemeinerte Interpolationen zu konstruieren, die keine Stetigkeitsbedingung an u stellen, und für diese ähnliche Abschätzungen zu beweisen. Es sei an dieser Stelle auf die Zusammenfassung in (Schmich 2009) verwiesen.

Stabilisierung

Notwendig, um eine Approximation im Sinne von (3.8) zu erhalten, ist weiterhin die (eindeutige) Lösbarkeit des diskreten Galerkin-Problems (3.2) für einen Ansatzraum \hat{X}_h . Eine hinreichende Bedingung an die diskretisierten Räume ist hierbei die (*Babuška-Brezzi*-) *Inf-Sup-Bedingung*

$$\exists \gamma \text{ unabhängig von } h, \text{ so dass } \inf_{p_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \hat{V}_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{\|p_h\| \|\nabla \mathbf{v}_h\|} \geq \gamma > 0, \quad (3.10)$$

welche die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Problems (3.2) sichert (vgl. Rannacher 2006).

Der hier vorgestellte, einfache Galerkin-Ansatz mit Finite-Elemente-Räumen gleicher Ordnung erfüllt allerdings nicht die Inf-Sup-Bedingung (3.10). Die numerische Stabilität soll deshalb mit Hilfe einer *lokalen Projektionsstabilisierung* (LPS) sicher gestellt werden. Hierbei werden zur variationellen Formulierung (3.2) Stabilisierungsterme hinzugefügt:

Definition 3.6 (Stationäres Modell, diskrete, stabilisierte Formulierung): Gesucht ist $u_h \in \hat{X}_h$ mit

$$\begin{cases} b_h(u_h, \Phi_h) = 0 \quad \forall \Phi_h \in X_h, \\ b_h(u_h, \Phi_h) = a(u_h, \Phi_h) + s_{\text{LPS}}(u_h, \Phi_h). \end{cases} \quad (3.11)$$

Die Stabilisierung s_{LPS} sei gegeben durch

$$s_{\text{LPS}}(u_h, \Phi_h) = \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \alpha_K (\nabla(p_h - \pi p_h), \nabla(\xi_h - \pi \xi_h))_K, \quad (3.12)$$

wobei α_K ein gitter- und zellabhängiger Parameter, und π die Projektion auf ein Grobgitter X_{2h} ist. Eine genaue Formulierung wird in (Becker u. Braack 2001, 2004) gegeben.

Zusammenfassend lässt sich für diese Wahl an Ansatzraum und Stabilisierung folgendes Resultat beweisen:

Proposition 3.4: Unter den oben gemachten Annahmen liefert eine geeignete Parameterwahl der LPS-Stabilisierung die numerische Stabilität des Verfahrens und letztendlich eine Konvergenz im Sinne von (3.8),

$$u_h \longrightarrow u \quad \text{für } h \longrightarrow 0.$$

Der durch die Stabilisierung eingeführte Konsistenzfehler der Gleichung (3.11) ist hierbei von der gleichen asymptotischen Konvergenzordnung wie der Diskretisierungsfehler.

Beweis: Es seien auf die entsprechenden Aussagen in (Becker u. Braack 2001, 2004) verwiesen. □

Bemerkung: Für höhere Reynoldszahlen ist der konvektive Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ in den Navier-Stokes-Gleichungen ebenfalls eine Quelle numerischer Instabilität. In diesem Fall kann die reine Druckstabilisierung in (3.12) erweitert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\text{LPS}}(u_h, \Phi) &= \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \alpha_K (\nabla(p_h - \pi p_h), \nabla(\xi_h - \pi \xi_h))_K \\ &+ \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \delta_K (\mathbf{v}_h \cdot \nabla(\mathbf{v}_h - \pi \mathbf{v}_h), \mathbf{v}_h \cdot \nabla(\varphi_h - \pi \varphi_h))_K. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Eine Anwendung und ausführliche Darstellung liefert z. B. (Braack u. Richter 2006).

Lösung der diskretisierten Gleichungen

Nun sind wir in der Lage, ausgehend von einer Wahl $\{\mathbb{T}_h\}_h$ an Gitterhierarchie, eine Approximation der Lösung u des Gleichungssystems (3.2),

$$a(u, \Phi) = 0 \quad \forall \Phi \in X,$$

zu berechnen. Das in jedem Schritt zu lösende, endlichdimensionale Gleichungssystem (3.11), welches durch die diskrete, stabilisierte Formulierung entsteht,

$$b_h(u_h, \Phi_h) = 0 \quad \forall \Phi_h \in X_h,$$

wird mit einem *gedämpften Newton-Verfahren* gelöst. Ausgehend von einer Startwert $u_h^{(0)}$ sucht man iterierte Näherungslösungen $u_h^{(t)} \rightarrow u_h$ durch

$$\begin{aligned} u_h^{(t)} &= u_h^{(t-1)} + \lambda^{(t)} \delta u_h^{(t)}, \text{ und } \delta u_h^{(t)} \text{ löst} \\ b'_h \left(u_h^{(t-1)}, \Phi_h \right) \left[\delta u_h^{(t)} \right] &= -b_h \left(u_h^{(t-1)}, \Phi_h \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Hierbei ist $\lambda^{(t)} \in (0, 1]$ ein nach einer geeigneten Strategie zu wählender Dämpfungsparemeter und $b'_h(\cdot, \cdot)[\cdot]$ die *Gâteaux-Ableitung* nach dem ersten Argument:

$$b'_h \left(u_h^{(t-1)}, \Phi_h \right) \left[\delta u_h^{(t)} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(b_h \left(u_h^{(t-1)} + \varepsilon \delta u_h^{(t)}, \Phi_h \right) - b_h \left(u_h^{(t-1)}, \Phi_h \right) \right).$$

Die in (3.14) entstehenden linearen Teilprobleme des Newtonverfahrens werden mit dem *GMRES-Algorithmus* („*generalized minimal residual method*“) mit einem *Mehrgitterverfahren* als Vorkonditionierer gelöst (Stoer u. Bulirsch 2005; Rannacher 2006).

3.3.3 Berechnung des Strömungswiderstands

Bei der Simulation der variationellen Gleichung (3.2) sind wir an der Berechnung des reskalierten, in Gleichung (2.16) definierten Strömungswiderstands \mathcal{F} auf Γ interessiert,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{\Gamma} \sigma \cdot \mathbf{n} \, do \\ &= \int_{\Gamma} \left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right) \cdot \mathbf{n} \, do - \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \, do. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Eine direkte Berechnung des Integrals (3.15) ist insbesondere im Hinblick auf die Randapproximation des gekrümmten Rands Γ durch das hexaedrische Gitter ungeschickt: Bei der Berechnung der Lösung $u_h \in \hat{X}_h$ des diskreten Problems (3.2) auf einer Gitterstufe \hat{X}_h und der anschließenden näherungsweise Berechnung von \mathcal{F} durch

$$\mathcal{F}_h = \int_{\Gamma_h} \left(\nabla \mathbf{v}_h + \nabla \mathbf{v}_h^T \right) \cdot \mathbf{n} \, do - \int_{\Gamma_h} p_h \mathbf{n} \, do$$

ist aufgrund des Umstands, dass $\Gamma_h \neq \Gamma$, keine optimale Konvergenzordnung für $\mathcal{F}_h \rightarrow \mathcal{F}$ zu erwarten.

Besser ist die z. B. in (Braack 2005) beschriebene Methode (3.15) in ein Volumenintegral zu überführen („*Babuška-Miller-Trick*“). Hierzu wird (3.15) zunächst geeignet umgeformt:

Lemma 3.5: Sei Γ ein C^1 -Rand, $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3$ inkompressibel, d. h. $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$ in Ω , sowie $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. Dann ist \mathcal{F} wohldefiniert und es gilt:

$$\mathcal{F}_i = \int_{\Gamma} \partial_n v_i - p n_i \, do. \quad (3.16)$$

Beweis: \mathcal{F}_i ist offensichtlich wohldefiniert, da ein C^1 -Rand ein mindestens stetiges Normalenfeld \mathbf{n} besitzt. Man berechnet:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_i &= \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_i \, d\mathbf{o} \\
 &= \int_{\Gamma} \sum_j \sigma_{ij} n_j \, d\mathbf{o} \\
 &= \int_{\Gamma} \sum_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j) n_j - p n_i \, d\mathbf{o} \\
 &= \int_{\Gamma} \sum_j n_j \partial_j v_i - p n_i \, d\mathbf{o} + \int_{\Gamma} \sum_j \partial_i v_j n_j \, d\mathbf{o} \\
 &= \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} v_i - p n_i \, d\mathbf{o} + \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_i \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{o}.
 \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{e}_i \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{o} = 0.$$

Hierfür sei festgestellt, dass aufgrund der Tatsache, dass $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3$ liegt, die Spur $\nabla \mathbf{v}|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)^{3 \times 3}$ wohldefiniert ist. Des Weiteren folgt aufgrund der Inkompressibilität ($\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$ in Ω) und der Stetigkeit des Spuroperators

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})|_{\Gamma} \equiv 0 \text{ in } L^2(\Gamma). \tag{3.17}$$

Seien nun \mathbf{t}_1 und $\mathbf{t}_2 \in C(\Gamma)^3$ zwei Tangentialfelder, so dass $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ in jedem Punkt des Rands ein Orthonormalsystem bildet. (Aufgrund der betrachteten Geometrie ist eine solche Wahl stets global möglich.)

Man macht sich leicht klar, dass aus der Divergenzfreiheit (3.17) durch Rotation auf das Orthonormalsystem $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3)$ die Gleichung

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_1 + (\mathbf{t}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_2 \equiv 0$$

auf Γ folgt. Weiterhin verschwinden aufgrund der Nullrandwerte $\mathbf{v}|_{\Gamma} \equiv 0$ die Ableitungen $(\mathbf{t}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}$, $(\mathbf{t}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}$ in Tangentialrichtung, d. h. wir haben

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Analog ist

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e}_i \cdot \nabla) \mathbf{v} &= ((\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \nabla) + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_1) (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla) + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_2) (\mathbf{t}_2 \cdot \nabla)) \mathbf{v} \\
 &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v},
 \end{aligned}$$

also $(\mathbf{e}_i \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$. □

Partielles Integrieren der in (3.2) definierten variationellen Form a mit einer speziellen Wahl $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, 0)$ für die Testfunktion liefert:

$$\begin{aligned} a(u, \tilde{\Phi}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \tilde{\varphi}) + (\nabla \mathbf{v}, \nabla \tilde{\varphi}) - (p, \nabla \tilde{\varphi}) \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla p, \tilde{\varphi}) + \int_{\partial\Omega} (\partial_n \mathbf{v} - p \mathbf{n}) \tilde{\varphi} \, d\sigma \end{aligned}$$

Ist nun $u = (\mathbf{v}, p)$ eine Lösung von (3.1) im starken Sinne und wählt man $\tilde{\varphi} \in V$ so, dass $\tilde{\varphi}_i = 1$ auf Γ und $\tilde{\varphi}_i = 0$ sonst, sowie $\tilde{\varphi}_j = 0$ für $j \neq i$, so ergibt sich

$$a(u, \tilde{\Phi}) = \int_{\Gamma} \partial_n v_i - p n_i \, d\sigma = \mathcal{F}_i. \quad (3.18)$$

Für eine näherungsweise Auswertung des Widerstands nach (3.18),

$$\tilde{\mathcal{F}}_{h,i} = b_h(u_h, \tilde{\Phi}_h), \quad (3.19)$$

wobei u_h Lösung des diskreten, stabilisierten Problems (3.11) sei, lassen sich verbesserte Konvergenzordnungen für $\tilde{\mathcal{F}}_{h,i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ zeigen:

$$|\tilde{\mathcal{F}}_{h,i} - \mathcal{F}_i| = \mathcal{O}(h^4),$$

falls die Lösung (u, z) des Problems (3.21) mindestens H^3 -Regularität besitzt (Braack 2005, Kapitel 4.5).

3.3.4 A posteriori - Fehleranalyse

Der Umstand, dass eine globale Verfeinerung des Gitters in drei Dimensionen in jedem Schritt eine Verachtfachung des Speicherbedarfs bedeutet und man so bei der Berechnung schnell an technische Grenzen stößt, macht eine lokale Verfeinerungsstrategie notwendig.

Ein vielversprechendes Verfahren ist dabei eine Fehlerschätzung mit Hilfe der „Dual Weighted Residual“ (DWR) - Methode.

Rein residuenbasierte Fehlerschätzer, die den Diskretisierungsfehler über das Residuum abschätzen, versuchen auf ein möglichst gutes Konvergenzverhalten in gewissen Normen zu optimieren, d. h.

$$\|u - u_h\| \rightarrow 0.$$

Dem gegenüber hat die DWR-Methode den Vorteil, direkt mit dem Ziel eines optimalen Konvergenzverhaltens von Zielfunktionalen $J(u)$,

$$|J(u) - J(u_h)| \rightarrow 0,$$

zu verfeinern. Eine Zusammenfassung über die Anwendung der DWR-Methode auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen liefert (Becker 1998).

Im folgenden Abschnitt wird zunächst eine abstrakte Formulierung in Anlehnung an (Becker u. Rannacher 2001) und (Schmich 2009, Kapitel 4) gegeben. Anschließend folgt eine konkrete Zusammenstellung der Ergebnisse für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

Sei $J : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Funktional. Die Aufgabe $J(u)$ aus der Lösung u von (3.2) zu errechnen ist äquivalent zur Optimierungsaufgabe

$$J(u) = \min! \quad \text{unter der Nebenbedingung } a(u, \Phi) = 0 \quad \forall \Phi \in X. \quad (3.20)$$

Die Äquivalenz folgt unmittelbar aus der eindeutigen Lösbarkeit von (3.2) nach Proposition 3.1. Eine Lösung des Systems (3.20) korrespondiert zu stationären Punkten $(u, z) \in \hat{X} \times X$ der *Lagrangefunktion*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \hat{X} \times X &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}(u, z) &= J(u) - a(u, z). \end{aligned}$$

Wir suchen also Lösungen $(u, z) \in \hat{X} \times X$ des Euler-Lagrange-Systems

$$\begin{cases} a(u, \Phi) = 0 & \forall \Phi \in X, \\ J'_u(u) [\Phi] = a'_u(u, z) [\Phi] & \forall \Phi \in X, \end{cases} \quad (3.21)$$

wobei die *Gâteaux*-Ableitungen $J'_u(\cdot) [\cdot]$, $a'_u(\cdot, \cdot) [\cdot]$ nach dem ersten Argument u zu verstehen sind:

$$\begin{aligned} J'_u(u) [\Phi] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(J(u + \varepsilon \Phi) - J(u) \right), \\ a'_u(u, z) [\Phi] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(a(u + \varepsilon \Phi, z) - a(u, z) \right). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird *primales Problem*, die zweite *duales Problem* genannt. Dieses System sei nun wie folgt diskretisiert:

Definition 3.7 (Diskretes primales und duales Problem): Gesucht sind stationäre Punkte $(u_h, z_h) \in \hat{X}_h \times X_h$ der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h : \hat{X}_h \times X_h &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_h(u_h, z_h) &= J(u_h) - b_h(u_h, z_h), \end{aligned}$$

also

$$\begin{cases} b_h(u_h, \Phi_h) = 0 & \forall \Phi_h \in X_h, \\ J'_u(u_h) [\Phi_h] = b'_{h,u}(u_h, z_h) [\Phi_h] & \forall \Phi_h \in X_h. \end{cases} \quad (3.22)$$

Die folgende Proposition liefert nun den Schlüssel, um hieraus einen *a posteriori*-Fehlerschätzer zu machen:

Proposition 3.6: Seien (u, z) und (u_h, z_h) Lösungen von (3.21) bzw. (3.22). Dann gilt die Fehlerdarstellung:

$$J(u) - J(u_h) = \mathcal{L}'(u_h, z_h) [u - u_h, z - z_h] + s_{\text{LPS}}(u_h, z_h) + R, \quad (3.23)$$

mit einem Restglied R von quadratischer Ordnung in $\|u - u_h\|, \|z - z_h\|$.

Beweis: Unter der Annahme der Existenz einer Taylorentwicklung der Lagrangefunktion \mathcal{L} gilt

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= \mathcal{L}(u, z) - \mathcal{L}_h(u_h, z_h) \\ &= \mathcal{L}(u, z) - \mathcal{L}(u_h, z_h) + s_{\text{LPS}}(u_h, z_h) \\ &= \mathcal{L}'(u_h, z_h) [u - u_h, z - z_h] + R + s_{\text{LPS}}(u_h, z_h). \end{aligned}$$

□

Diese Proposition ermöglicht es nun mit einer genaueren Kenntnis der Struktur von R und s_{LPS} durch eine weitergehende Begriffsbildung (vgl. Schmich 2009) einen zellweisen Fehlerschätzer zu konstruieren. Unter der Hypothese R und s_{LPS} seien vernachlässigbar klein, erhält man

$$J(u) - J(u_h) \approx \frac{1}{2} \mathcal{L}'_z(u_h, z_h) [u - u_h, z - z_h] + \frac{1}{2} \mathcal{L}'_u(u_h, z_h) [u - u_h, z - z_h].$$

Eine Abschätzung von $u - u_h$ bzw. $z - z_h$ liefert hierbei z. B. eine Interpolation π auf ein Grobgitter (Schmich 2009, Kapitel 4.3), d. h.

$$u - u_h \approx u_h - \pi u_h. \quad (3.24)$$

Für den Spezialfall eines linearen Funktionals $J(u)$ sei an dieser Stelle folgendes Resultat zitiert:

Proposition 3.7: Seien (u, z) und (u_h, z_h) Lösungen von (3.21) bzw. (3.22). Sei $J(u)$ linear und seien des Weiteren die Komponenten von z und z_h mit (\mathbf{w}, r) bzw. (\mathbf{w}_h, r_h) bezeichnet. Dann erhält man unter der Annahme einer um eine Ableitungsstufe höheren Regularität von (u, z) und (u_h, z_h) durch zellweise partielle Integration die folgende Fehlerabschätzung:

$$J(u) - J(u_h) \leq \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \left\{ \rho_K^1 \omega_K^1 + \rho_K^2 \omega_K^2 + \rho_K^3 \omega_K^3 \right\}, \quad (3.25)$$

mit den Residuen

$$\begin{aligned}\rho_K^1 &= \|\Delta \mathbf{v}_h - (\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h - \nabla p_h\|_K, \\ \rho_K^2 &= \|[\partial_n \mathbf{v}_h]\|_{\partial K}, \\ \rho_K^3 &= \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_K,\end{aligned}$$

und den Fehlergewichten

$$\begin{aligned}\omega_K^1 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_K, \\ \omega_K^2 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{\partial K}, \\ \omega_K^3 &= \|r - r_h\|_K.\end{aligned}$$

Die auftretenden Gewichte werden wie oben angesprochen durch Interpolation auf ein Grobgitter abgeschätzt (Becker 1998).

Hiermit kann nun durch $\eta_K = \rho_K^1 \omega_K^1 + \rho_K^2 \omega_K^2 + \rho_K^3 \omega_K^3$ der Fehlerbeitrag einer einzelnen Zelle K zum Gesamtfehler $|J(u) - J(u_h)|$ abgeschätzt werden. Anschließend wählt man mit einer geeigneten Verfeinerungsstrategie eine gewisse Zahl an Zellen zur Verfeinerung aus. (Schmich 2009, Kapitel 4.4, 4.5) liefert eine Zusammenfassung einer solchen Verfeinerungsstrategie.

Eine kritische Betrachtung dieser Vorgehensweise wird in Abschnitt 3.5.1 gegeben.

Bemerkung: Die genaue Form des diskreten, dualen Problems (3.22) für das in (3.19) definierte Funktional $J(u_h) = \tilde{\mathcal{F}}_{h,i} = b_h(u_h, \tilde{\Phi}_h)$ ist:

Zu einer Lösung $u_h \in \hat{X}$ des primalen Problems ist ein $z_h = (w_h, r_h) \in X_h$ gesucht mit

$$\begin{aligned}J'(u_h)[\Phi_h] &= b'_h(u_h, z_h)[\Phi_h] \quad \forall \Phi_h = (\varphi_h, \xi_h) \in X_h, \text{ wobei} \\ b'_h(u_h, z_h)[\Phi_h] &= (\mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_h + \varphi_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla \varphi_h, \nabla \mathbf{w}_h) - (\xi_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) \\ &\quad + (\nabla \cdot \varphi_h, r_h) + s_{\text{LPS}}(\Phi_h, z_h), \\ J'(u_h)[\Phi_h] &= b_h(\Phi_h, \hat{\Phi}_h),\end{aligned}$$

mit dem in (3.19) definierten $\hat{\Phi}_h$.

Bemerkung: Für das gewählte Funktional (3.18) kann das duale Problem (3.22) auch in die folgende Form umgeschrieben werden (Becker u. Braack 2004):

Gesucht ist $z_h \in X_h$ mit

$$\begin{cases} b'_h(u_h, z_h)[\Phi_h] = 0 & \forall \Phi_h \in X_h, \\ z_h = \hat{\Phi}_h \text{ auf } \Gamma, \end{cases} \quad (3.26)$$

mit dem in (3.19) definierten $\hat{\Phi}_h$.

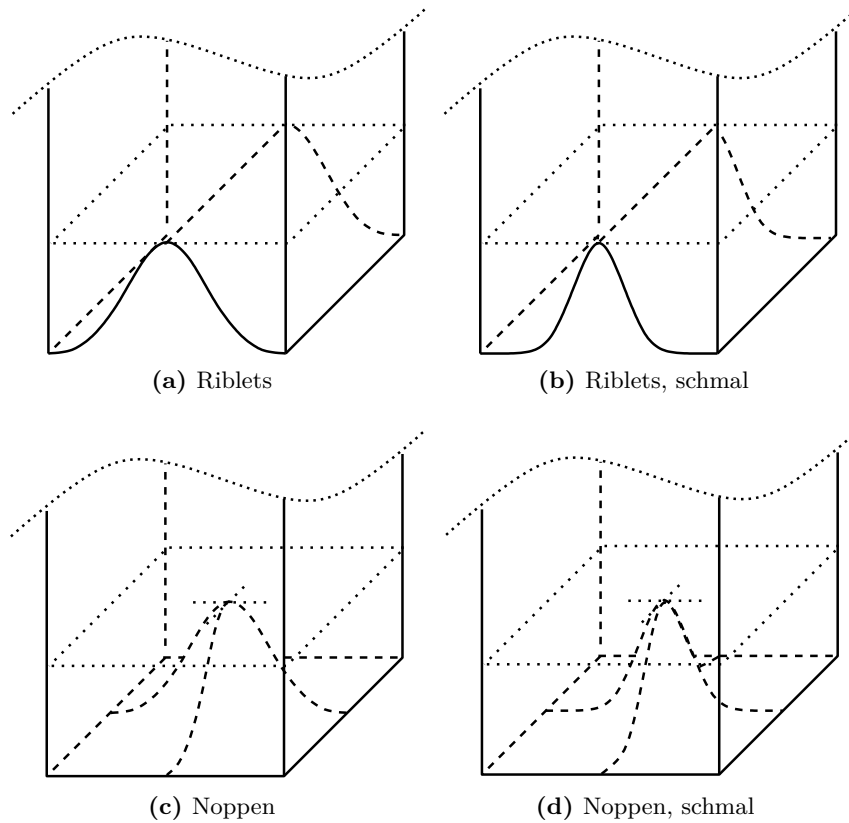


Abbildung 3.5: Die untersuchten Riblet- und Noppenstrukturen

3.4 Ribletgeometrien

Im periodischen Rechengebiet (Abb. 3.1) werden die in Abb. 3.5 gezeigten Ribletgeometrien untersucht. Die genaue Randparametrisierung ist gegeben durch:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Riblets} & \Gamma(x, z) = \frac{\varepsilon}{2} a^2(z), \\
 \text{Riblets, schmal} & \Gamma(x, z) = \frac{\varepsilon}{2} a^6(z), \\
 \text{Noppen} & \Gamma(x, z) = \frac{\varepsilon}{2} a^2(z) a^2(x), \\
 \text{Noppen, schmal} & \Gamma(x, z) = \frac{\varepsilon}{2} a^6(z) a^6(x),
 \end{array}$$

mit

$$a(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{\varepsilon} \pi x\right).$$

Die Motivation für die Wahl dieser beiden Geometrien sind die beim Haifisch gefundenen Ribletstrukturen. Wie in der Einleitung vorgestellt, kommen bei Haien im Wesentlichen

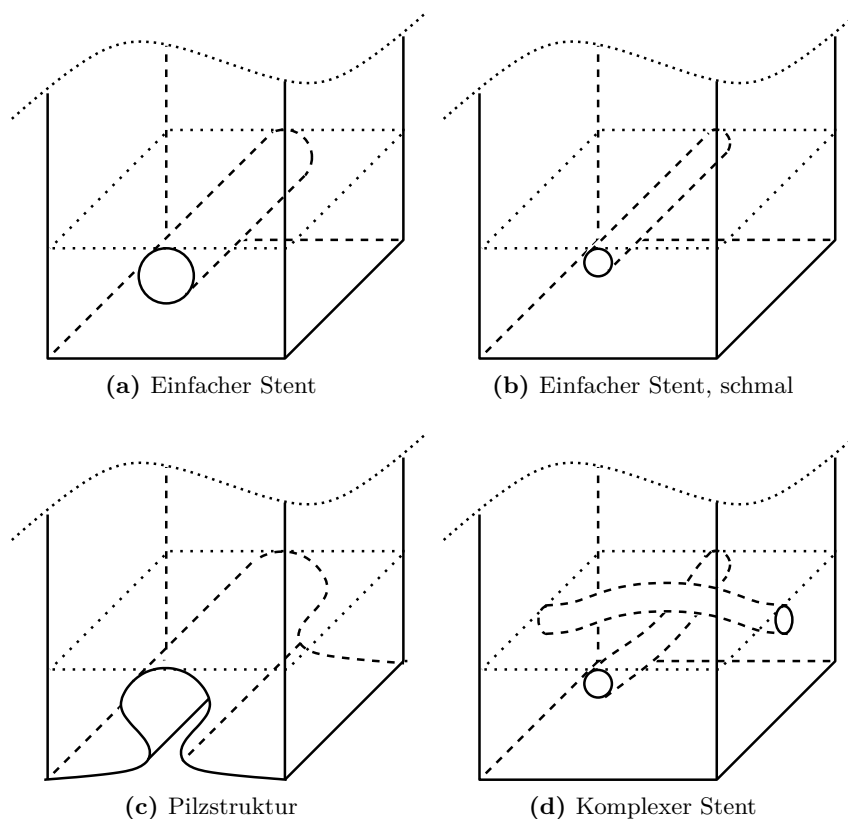


Abbildung 3.6: Die untersuchten *Stentstrukturen*

eine Ribletstruktur vor. Die konkreten Parametrisierungen stammen aus (Friedmann 2005) und (Friedmann u. Richter 2007) und sind ein Kompromiss aus der von Friedmann (2005) durch *Formoptimierung* („*shape design*“) gefundenen, optimalen Ribletform und einer genügend „breiten“ Form, die ein ausreichend reguläres Gitter (nach Def. 3.5) für eine gute numerische Handhabbarkeit ermöglicht. Die Wahl eines Rands mit C_{per}^{∞} -Parametrisierung ermöglicht es, alle angesprochenen numerische Verfahren mit guten Lösungs- und Konvergenzverhalten zur Anwendung zu bringen.

Strömungsversuche haben gezeigt, dass Ribletstrukturen zu einer Widerstandsverbesserung führen, wogegen dies bei Noppenstrukturen nicht zu beobachten ist (vgl. Abschnitt 2.3). Ein Vergleich dieser beiden Geometrien ist deshalb sehr interessant.

Um das numerische Verfahren und die in Kapitel 3 behandelte Homogenisierung an ein paar weiteren Fällen zu testen, wollen wir noch eine Reihe weiterer Geometrien betrachten (Abb. 3.6). Diese Geometrien sind allesamt nicht durch einen Graphen für den Rand Γ beschreibbar. Die formulierten analytischen Ergebnisse und die in Kapitel 3 vorgestellte Homogenisierung lassen sich aber auf diesen Fall erweitern (vgl. Jäger u. Mikelić 1996, 2001). Anzumerken bleibt noch, dass die beiden letzten Geometrien

(„Pilzstruktur“ und „komplexer Stent“) durch die komplexere Struktur eine niedrigere Gitterregularität bedingen (insbesondere beim komplexen Stent zwischen den beiden Drahtstrukturen).

Ein *Stent* ist eine Röhre aus einem Drahtgittergerüst, welches als medizinisches Implantat in Blutgefäßen und anderen Hohlorganen zur Stabilisierung und Offenhaltung genutzt wird. Ein genaueres Verständnis der Strömungscharakteristik von Stents ist aktuell von allgemeinem Interesse, so dass sich diese Wahl alternativer Geometrien zur Simulation anbietet. Die einfache Stentgeometrie ist hierbei ein geradliniger Draht. Die komplexe Stentstruktur simuliert eine Überkreuzung zweier Drahtstücke.

3.5 Numerische Ergebnisse

Die vorgestellten Ribletgeometrien werden mit einer Höhe $H = 1$ und einer Skalierung $\varepsilon = 0.3$ numerisch direkt simuliert. Dies entspricht einer Ribletstrukturhöhe von $h^+ = 0.15$ (vgl. Abschnitt 3.1).

Um der Stationarität des Modells und dem beschriebenen Mechanismus der Widerstandsreduktion durch Umlenken der Strömung in Hauptströmungsrichtung Rechnung zu tragen, wird auf R eine konstante Überströmung von $\mathbf{V} = (1, 0, 1)$ angelegt. Dies simuliert eine zur Hauptströmungsrichtung (x-Achse) um 45° gedrehte Überströmung und ermöglicht es so, das Umlenken der Überströmung in die Hauptströmungsrichtung zu beobachten (Friedmann 2005). Eine weitergehende Diskussion der Wahl dieser Überströmung erfolgt in Abschnitt 3.6.1.

3.5.1 Konvergenz des Strömungswiderstands

Wir sind an einer Schätzung des Strömungswiderstands

$$\mathcal{F}_i = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_i$$

interessiert. Zur Approximation von \mathcal{F}_i berechnen wir für eine Folge von lokal verfeinerten Gittern den Wert $\mathcal{F}_{h,i}(u)$ zu einer Lösung u_h des diskreten Problems (3.11). Die Frage ist nun, wie groß hierbei der Fehler $|\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_{h,i}|$ ist und in wie weit sich die Extrapolation

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_{h,i}$$

für eine Schätzung von \mathcal{F}_i eignet.

Die Fehlerquellen von $|\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_{h,i}|$ sind zum einen der *Diskretisierungsfehler*, der durch das Lösen auf $\hat{X}_h \subset \hat{X}$ entsteht, zum anderen der *Konsistenzfehler* durch das Lösen einer modifizierten Gleichung aufgrund der Stabilisierung. Wir haben gesehen, dass mit

$$h = \sup_{k \in \mathbb{T}_h} \text{diam}(K) \longrightarrow 0$$

Konsistenz- und Diskretisierungsfehler bei globaler Verfeinerung mit der gleichen Asymptotik verschwinden (vgl. Proposition 3.4), d. h. $u_h \longrightarrow u$ in \hat{X} . Hieraus folgt aufgrund der Stetigkeit des Funktionals

$$\mathcal{F}_{h,i} \longrightarrow \mathcal{F}_i.$$

Nun benutzen wir allerdings eine *lokale Verfeinerungsstrategie*, d. h. einen modifizierten Konvergenzbegriff, so z. B.

$$h := \frac{1}{\#\text{Zellen}} \longrightarrow 0. \quad (3.27)$$

Die Frage ist in wie weit wir auch hier eine Konvergenz $\mathcal{F}_{h,i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ erhalten. Die lokale Verfeinerungsstrategie besitzt mehrere mögliche, systematische Fehlerquellen:

- i.) In wie weit eignet sich die angesprochene Interpolation (3.24) dazu den tatsächlichen Fehler $z - z_h$ zu schätzen? (Für eine weitergehende Diskussion sei auf Schmich 2009 verwiesen)
- ii.) Ist die Annahme, R und s_{LPS} in (3.23) seien klein, zulässig?
- iii.) Der modifizierte Konvergenzbegriff (3.27) ist sicherlich nicht unabhängig von der betrachteten Folge von Gittern mit jeweils höherer Zellenzahl. Was rechtfertigt also eine Extrapolation der errechneten Werte mit (3.27)? Ist z. B. eine Extrapolation mit $h^{-1} := \#\text{Freiheitsgrade}$ (welches deutlich von obigem h abweichen kann) besser geeignet?

Diese Fehlereinflüsse können dazu führen, dass die Funktionale $\mathcal{F}_{h,i}$ zu einem falschen Grenzwert $\neq \mathcal{F}_i$ konvergieren.

Um die bei der Simulation gewonnenen Ergebnisse nutzen zu können, ist es deshalb notwendig, eine Größenordnung für diese Fehlerquellen abzuschätzen. Dies soll durch eine Reihe von unterschiedlichen Berechnungen geschehen:

Vergleich verschiedener Rechengebiete

Alle in Abb. 3.7 gezeigten Rechengebiete Ω besitzen (für ein hinreichend kleines ε) die selbe eindeutige, periodische Lösung $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 \times L_{\text{per}}^2(\Omega)$:

Eine Lösung von Ω ist nach entsprechendem Verschieben ebenfalls eine Lösung des verschobenen Rechengebietes $\Omega^{\text{vers.}}$ aus Abb. 3.7c und umgekehrt. Weiterhin gilt für eine Lösung auf Ω mit $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 \times L_{\text{per}}^2(\Omega)$ bereits $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega^{3 \times 3}) \times L_{\text{per}}^2(\Omega^{3 \times 3})$ – u ist damit auch eine Lösung auf dem großen Gebiet $\Omega^{3 \times 3}$ aus Abb. 3.7b. Für den kritischen Schritt, dass eine 3ε -periodische Lösung $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega^{3 \times 3}) \times L_{\text{per}}^2(\Omega^{3 \times 3})$ auf $\Omega^{3 \times 3}$ sogar ε -periodisch und somit eine Lösung auf Ω ist, wird die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage einer bereits ε -periodischen Lösung auf $\Omega^{3 \times 3}$ aus Proposition 4.1 benötigt.

Bemerkung: Mit Hilfe der Regularitätsaussage in Proposition 3.2 ergibt sich das stärkere Resultat, dass alle drei Gebiete die (bis auf Verschieben) gleiche Lösung

$$u \in (H^2(\Omega) \cap H_{\text{per}}^1(\Omega)) \times H_{\text{per}}^1(\Omega)$$

besitzen.

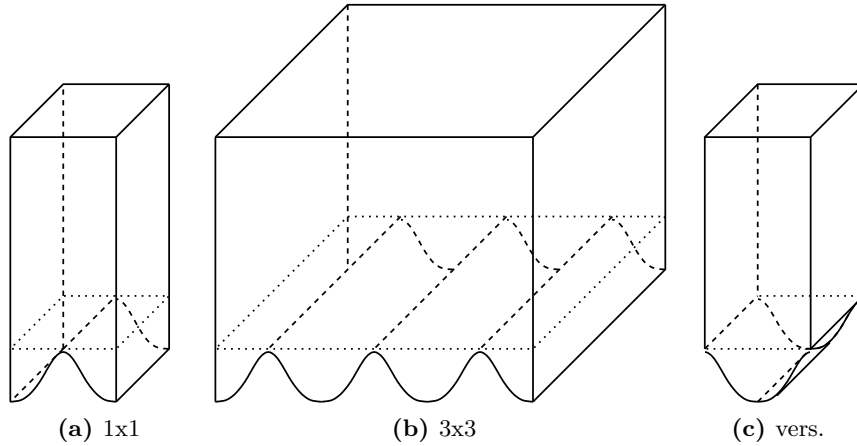


Abbildung 3.7: Unterschiedliche Simulationsgebiete Ω einer Geometrie mit gleicher (ggf. verschobener) periodischer Lösung $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 \times L_{\text{per}}^2(\Omega)$ des Problems (3.2)

Eine Berechnung des (mit der Grundseite normalisierten) Strömungswiderstands sollte für jede Geometrie also auch den selben Wert ergeben. Wir rechnen dies für die Riblet- und die Noppengeometrie nach (vgl. Tabelle 3.1).

Man erkennt, dass sich bei der Ribletgeometrie kein Unterschied bei den errechneten Werten einstellt. Die Ergebnisse der Noppengeometrie weichen um etwa 0.5 % von einander ab.

Vergleich von periodisiertem und nicht periodisiertem Druck

Die Implementierung der periodischen Randdaten in GASCOIGNE erfolgt dadurch, dass auf den periodischen Rändern die Freiheitsgrade gegenüberliegender Knoten in den periodischen Komponenten vereinigt werden. Für eine detaillierte Darstellung sei auf (Klein 2009) verwiesen.

Aufgrund der für die vorgestellten numerischen Verfahren (insbesondere der Stabilisierung und der Gültigkeit von Proposition 3.4) notwendigen Approximation des Drucks in $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ haben wir hier aus analytischer Sicht eine Freiheit: Wir können die für eine Gitterstufe \mathbb{T}_h berechnete Druckapproximation

$$p_h \in \left(L^2(\Omega) / \mathbb{R} \right) \cap Q_h^2(\Omega)$$

ebenso wie den Ansatzraum für die Geschwindigkeiten periodisieren, d. h. wir fordern ebenfalls, dass Spuren von p_h auf gegenüberliegenden periodischen Rändern Γ_i, Γ_j identisch sind:

$$p_h|_{\Gamma_i} = p_h|_{\Gamma_j}.$$

Level	1×1			3×3		
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	1536	1.1223	1.1492	17280	1.1220	1.1479
2	4224	1.1222	1.1483	44160	1.1222	1.1480
3	21248	1.1222	1.1480	249344	1.1222	1.1480
4	117120	1.1222	1.1480			
5	589312	1.1222	1.1480			
extrap.		1.1222	1.1480		1.1222	1.1480

1x1, verschoben			
Level	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	1536	1.1205	1.1429
2	4224	1.1216	1.1465
3	11392	1.1221	1.1478
4	57088	1.1222	1.1480
5	190592	1.1222	1.1480
extrap.		1.1222	1.1480

(a) Ribletgeometrie

Level	1×1			3×3		
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	2880	1.0884	1.0884	25920	1.0877	1.0877
2	6912	1.0882	1.0882	62208	1.0881	1.0881
3	35136	1.0877	1.0877	310848	1.0881	1.0881
4	221504	1.0877	1.0877			
5	771200	1.0877	1.0877			
extrap.		1.0877	1.0877		1.0881	1.0881

(b) Noppengeometrie

Tabelle 3.1: Vergleich des errechneten Strömungswiderstands $\mathcal{F}_{h,i}$ für die Riblet- und Noppengeometrie auf dem 1×1-, dem 3×3- und dem verschobenen Rechengebiet

Da wir letztendlich eine Konvergenz in $L^2(\Omega)$ betrachten, schränkt dies in keiner Weise eine Konvergenz von p_h gegen ein beliebiges $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ ein. (Jede Funktion in $L^2(\Omega)$ kann durch C_0^∞ -Funktionen und damit durch C_{per}^∞ -Funktionen in der L^2 -Norm approximiert werden.) Wir können aber mit dieser Zwangsbedingung das numerische Verfahren im Sinne einer Konvergenz gegen die richtige Lösung u von (3.2) stabilisieren (vgl. Klein 2009).

Vergleichen wir die Rechenergebnisse für die beiden diskreten Ansatzräume für den Druck (Tabellen 3.2a und 3.2b), so ist analog zum Fall der verschiedenen Rechengebiete bei der Noppengeometrie eine Abweichung von etwa 0.5‰ erkennbar.

Wie werden im Folgenden stets mit einer Periodisierung des diskreten Drucks arbeiten.

Level	Freier Druck			Periodisierter Druck		
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	1536	1.1235	1.1492	1536	1.1223	1.1492
2	4224	1.1224	1.1483	4224	1.1222	1.1483
3	21248	1.1222	1.1480	21248	1.1222	1.1480
4	118016	1.1222	1.1480	117120	1.1222	1.1480
5	561536	1.1222	1.1480	589312	1.1222	1.1480
extrap.		1.1222	1.1480		1.1222	1.1480

(a) Ribletgeometrie, Vergleich freier und periodisierter Druck

Level	Freier Druck			Periodisierter Druck		
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	2880	1.0884	1.0884	2880	1.0884	1.0884
2	6912	1.0882	1.0882	6912	1.0882	1.0882
3	30656	1.0881	1.0881	35136	1.0877	1.0877
4	191936	1.0881	1.0881	221504	1.0877	1.0877
5	617984	1.0881	1.0881	771200	1.0877	1.0877
extrap.		1.0881	1.0881		1.0877	1.0877

(b) Noppengeometrie, Vergleich freier und periodisierter Druck

Tabelle 3.2: Vergleich des errechneten Strömungswiderstands $\mathcal{F}_{h,i}$ für die Riblet- und Noppengeometrie mit freiem und periodisiertem Druck

Vergleich mit globaler Verfeinerung

Um den Fehlereinfluss der lokalen Verfeinerungsstrategie abzuschätzen, möchten wir abschließend die Rechenergebnisse mit denen einer globalen Verfeinerungsstrategie abschätzen (Tabellen 3.3a und 3.3b). Auch dieser Vergleich zeigt das bereits bekannte Ergebnis einer geringfügigen Abweichung der Noppenstruktur.

DWR-Fehlerschätzer

Wir sind bei der Simulation an der gleichzeitigen Berechnung von $\mathcal{F}_{h,x}$ und $\mathcal{F}_{h,z}$ interessiert. Die lokale Verfeinerungsstrategie ist allerdings nur für das Optimieren auf ein Funktional formuliert. Wir werden deshalb die Rechnungen zum einen jeweils mit einem DWR-Fehlerschätzer für das Funktional $\mathcal{F}_{h,x}$ bzw. $\mathcal{F}_{h,z}$ durchführen (\mathbf{dwr}_x , \mathbf{dwr}_z) und zum anderen einen kombinierten Fehlerschätzer \mathbf{dwr}_{x+z} einsetzen, bei dem durch Berechnen beider dualen Probleme und Addieren der Einzelergebnisse eine Gesamtschätzung $\eta_K = \eta_{K,\mathbf{dwr}_x} + \eta_{K,\mathbf{dwr}_z}$ für eine einzelne Zelle K konstruiert wird.

Es stellt sich heraus, dass die unterschiedlichen Verfeinerungsstrategien (\mathbf{dwr}_x , \mathbf{dwr}_z , \mathbf{dwr}_{x+z}) gegen das gleiche Ergebnis konvergieren – Lediglich bei komplexeren Strukturen

Level	Global verfeinert			Lokal verfeinert		
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	1536	1.1223	1.1492	1536	1.1223	1.1492
2	12288	1.1222	1.1483	4224	1.1222	1.1483
3	93804	1.1222	1.1480	21248	1.1222	1.1480
4	786432	1.1222	1.1480	117120	1.1222	1.1480
5				589312	1.1222	1.1480
extrap.		1.1222	1.1480		1.1222	1.1480

(a) Ribletgeometrie, Vergleich globale und lokale Verfeinerung

Level	Global verfeinert			Lokal verfeinert		
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	2880	1.0884	1.0884	2880	1.0884	1.0884
2	23040	1.0882	1.0882	6912	1.0882	1.0882
3	184320	1.0881	1.0881	35136	1.0877	1.0877
4	1474560	1.0881	1.0881	221504	1.0877	1.0877
5				771200	1.0877	1.0877
extrap.		1.0881	1.0881		1.0877	1.0877

(b) Noppengeometrie, Vergleich globale und lokale Verfeinerung

Tabelle 3.3: Vergleich des errechneten Strömungswiderstands $\mathcal{F}_{h,i}$ für die Riblet- und Noppengeometrie mit globaler und lokaler Verfeinerung

(komplexer Stent, Tabelle 3.5d) ist eine geringfügige Abweichung innerhalb von 0.2‰ erkennbar.

Mit diesen Ergebnissen lässt sich zusammenfassend ein Simulationsfehler von 1‰ für die Rechnungen festhalten.

3.5.2 Resultate

Die Resultate sind in den Tabellen 3.4 und 3.5 zusammengefasst. Insgesamt ergibt sich für alle Ribletgeometrien (Riblets, einfacher Stent, Pilzstruktur) eine Widerstandszunahme von etwa 12% für \mathcal{F}_x und 15% für \mathcal{F}_z im Vergleich zur ungestörten Couette-Strömung mit Ursprung bei $z = 0$. Dieser Wert ist typisch für alle Ribletgeometrien mit einer festgeschriebenen Höhe von $\varepsilon/2 = 0.15$ der Mikrostruktur, einem Verhältnis von 2 : 1 von Breite zu Höhe der Mikrostruktur, und einer festgeschriebenen Überströmung bei einer Höhe $H = 1$. Es sei daran erinnert, dass dieser Vergleich für eine Aussage bezüglich der Widerstandsverbesserung unzulässig ist.

Die Noppenstrukturen schneiden mit einer Widerstandszunahme von 7 – 9% bezüglich der Couette-Strömung deutlich „besser“ ab. Dies ist aufgrund ihres kleineren Verdrängungsvolumens im Simulationsgebiet gegenüber den Ribletstrukturen allerdings nicht verwunderlich.

Level	dwr _{x+z}			dwr _x		dwr _z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	1536	1.1223	1.1492	1536	1.1223	1536	1.1492
2	4224	1.1222	1.1483	4224	1.1222	4224	1.1483
3	21248	1.1222	1.1480	21248	1.1222	21248	1.1480
4	117120	1.1222	1.1480	127872	1.1222	102784	1.1480
5	589312	1.1222	1.1480	629632	1.1222	425344	1.1479
extrap.		1.1222	1.1480		1.1222		1.1479

(a) Ribletstruktur

Level	dwr _{x+z}			dwr _x		dwr _z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	1536	1.1124	1.1464	1536	1.1124	1536	1.1464
2	4224	1.1120	1.1461	4224	1.1120	4224	1.1461
3	14976	1.1118	1.1457	24832	1.1119	14976	1.1457
4	64256	1.1118	1.1455	105472	1.1118	64256	1.1455
5	333952	1.1118	1.1455	466560	1.1118	324992	1.1455
extrap.		1.1118	1.1455		1.1118		1.1455

(b) Ribletstruktur, schmal

Level	dwr _{x+z}			dwr _x		dwr _z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	2880	1.0884	1.0884	2880	1.0884	2880	1.0884
2	6912	1.0882	1.0882	6912	1.0882	6912	1.0882
3	35136	1.0877	1.0877	35136	1.0877	35136	1.0877
4	—	—	—	221504	1.0877	221504	1.0877
5				771200	1.0877	771200	1.0877
extrap.		—	—		1.0877		1.0877

(c) Noppenstruktur

Level	dwr _{x+z}			dwr _x		dwr _z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	2880	1.0683	1.0683	2880	1.0683	2880	1.0683
2	6912	1.0697	1.0697	6912	1.0697	6912	1.0697
3	28864	1.0692	1.0692	28416	1.0691	28416	1.0691
4	94272	1.0691	1.0691	155648	1.0691	155648	1.0691
5	364864	1.0691	1.0691	438784	1.0691	438784	1.0691
extrap.		1.0691	1.0691		1.0691		1.0691

(d) Noppenstruktur, schmal

Tabelle 3.4: Ergebnisse der direkten numerischen Simulation der Ribletgeometrien

Level	dwr_{x+z}			dwr_x		dwr_z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	5568	1.1251	1.1500	5568	1.1251	5568	1.1500
2	16320	1.1250	1.1499	19008	1.1250	16320	1.1499
3	51712	1.1247	1.1496	82176	1.1247	49920	1.1496
4	325888	1.1247	1.1496	253312	1.1247	188800	1.1496
5	1267136	1.1247	1.1496	1242496	1.1247		
extrap.		1.1247	1.1496		1.1247		1.1496

(a) Einfache Stentstruktur

Level	dwr_{x+z}			dwr_x		dwr_z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	5568	1.1130	1.1445	5568	1.1130	5568	1.1445
2	16320	1.1123	1.1440	16320	1.1123	16320	1.1440
3	52160	1.1123	1.1438	52608	1.1123	51264	1.1438
4	206720	1.1122	1.1437	238976	1.1122	195072	1.1437
5	1234432	1.1122	1.1437	1137216	1.1122	1152000	1.1437
extrap.		1.1122	1.1437		1.1122		1.1437

(b) Einfache Stentstruktur, schmal

Level	dwr_{x+z}			dwr_x		dwr_z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	2816	1.1252	1.1505	2816	1.1252	2816	1.1505
2	9088	1.1250	1.1503	9088	1.1250	9088	1.1503
3	31488	1.1248	1.1500	35072	1.1248	29696	1.1502
4	129152	1.1248	1.1500	161408	1.1248	130944	1.1501
5	664960	1.1248	1.1500	790400	1.1248	903296	1.1501
extrap.		1.1248	1.1500		1.1248		1.1501

(c) Pilzstruktur

Level	dwr_{x+z}			dwr_x		dwr_z	
	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	#Zellen	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $
1	5376	1.1689	1.1592	5376	1.1689	5376	1.1592
2	22848	1.1683	1.1588	22400	1.1679	22848	1.1588
3	95872	1.1679	1.1585	83776	1.1676	95424	1.1585
4	307328	1.1679	1.1585	311360	1.1675	336896	1.1585
5	1472576	1.1679	1.1585				
extrap.		1.1679	1.1585		1.1675		1.1585

(d) komplexe Stentstruktur

Tabelle 3.5: Ergebnisse der direkten numerischen Simulation der Stentgeometrien

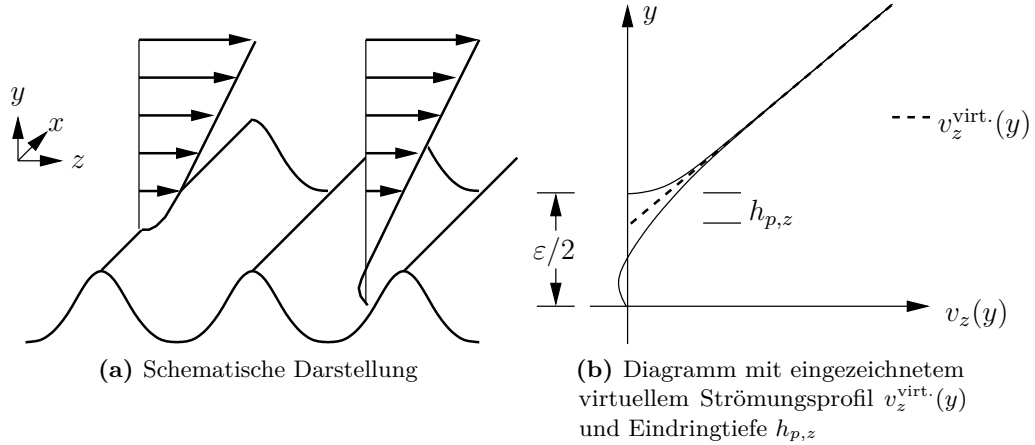


Abbildung 3.8: Strömungsprofil $v_z(y)$ auf einer Ribletgeometrie, jeweils eingezeichnet auf der Ribletspitze und im Riblettal

3.6 Strömungsprofil und Eindringtiefe

In Abb. 3.8a ist das Strömungsprofil $v_z(y)$ für einen Punkt (x, z) auf der Ribletspitze und für einen Punkt des Riblettals eingezeichnet. Man sieht, dass sich etwa ab der doppelten Riblethöhe ein gerades Couette-Profil einstellt. Nur lokal in der Nähe der Riblets beobachtet man durch die Ribletgeometrien hervorgerufene, größere Abweichungen. Dies motiviert, ein *virtuelles* Couette-Profil v_z^{virt} im ungestörten Höhenbereich über die Geschwindigkeitsverteilung zu legen.

Man stellt fest, dass der Nullpunkt y_0 des Profils, d. h. $v_z^{\text{virt.}}(y_0) = 0$, von 0 weg nach oben verschoben ist. Um ein Maß für diese Verschiebung zu erhalten, sei allgemein definiert:

Definition 3.8 (Eindringtiefe): Sei ξ ein Einheitsvektor in der (x, z) -Ebene, v_ξ^{virt} das virtuelle Couette-Profil der Strömungskomponente $\mathbf{v}(y) \cdot \xi$ und y_0 der Nullpunkt dieses Profils, d. h.

$$v_\xi^{\text{virt}}(y_0) = 0.$$

Unter der *Eindringtiefe* („*protrusion-height*“) $h_{p,\xi}$ versteht man nun die Differenz von Riblethöhe zur Nullstelle y_0 (Friedmann 2005),

$$h_{p,\xi} = \frac{\varepsilon}{2} - y_0. \quad (3.28)$$

In Tabelle 3.6 sind die Eindringtiefen der Strömungsprofile der numerischen Simulationen zum Vergleich zusammengefasst.

Geometrie	$h_{p,x}$	$h_{p,z}$	$h_{p,\xi}$
Riblets	0.04110	0.02110	0.03104
Riblets, schmal	0.04944	0.02292	0.03614
Noppen	0.06935	0.06935	0.06926
Noppen, schmal	0.08525	0.08525	0.08460
Einfacher Stent	0.03913	0.01974	0.02927
Einfacher Stent, schmal	0.04917	0.02420	0.03666
Pilzstruktur	0.03904	0.01949	0.02906
Komplexer Stent	0.00617	0.01313	0.00963

Tabelle 3.6: Eindringtiefen der simulierten Geometrien in x - und z -Richtung, sowie der Überströmungsrichtung $\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

3.6.1 Vergleich

Ein direkter Vergleich der Simulationsergebnisse ist, wie in Abschnitt 3.2 erläutert, nicht möglich. Wir wissen allerdings, dass Ribletstrukturen in der turbulenten Grenzschicht Einfluss auf die Überströmung nehmen. Dort führen sie lokal zu einer Änderung der Strömung. Ribletstrukturen haben aber keinen direkten Einfluss auf die Überströmung außerhalb der turbulenten Grenzschicht.

Betrachten wir nun das stationäre Modell: Das Einbauen von Ribletstrukturen führt zu einer lokalen Störung des ursprünglichen Couetteprofils bis etwa zur doppelten Strukturhöhe ε , d. h. im Höhenbereich von $0 - 0.3$. Im restlichen Simulationsgebiet (bei einer Höhe von $0.3 - 1.0$) stellt sich wieder ein Couetteprofil ein, d. h.

$$\partial_y v_i = \text{const.}$$

Durch das Einbringen von Rauheiten in das Simulationsgebiet beeinflussen wir aufgrund des Festschreibens der Überströmung \mathbf{V} bei einer konstanten Höhe von $H = 1$ massiv die Steigung $\partial_y v_i$ (vgl. Abb. 3.9a). Dies ist allerdings ein unphysikalischer Effekt. Das Einbringen von Ribletstrukturen führt zwar zu einer lokalen Änderung des Strömungsprofils und einem Verschieben des Ursprungs des Profils (Abb. 3.9b), nicht aber zu einer Änderung der Steigung $\partial_y v_i$ des Profils.

Dies bedeutet, dass wir bei einem Vergleich berücksichtigen müssen, dass beim Einbringen von Ribletstrukturen zugleich die Überströmung verändert wird. Aus den Simulationsdaten lässt sich allerdings die ursprüngliche, ungestörte Couetteströmung rekonstruieren: Diese ist gerade das *virtuelle Couetteprofil*, welches durch das Einbringen der Riblets um $\frac{\varepsilon}{2} - h_{p,\xi}$ nach oben verschoben wurde.

Lemma 3.8: Der Strömungswiderstand des virtuellen Couetteprofils in $\boldsymbol{\xi}$ -Richtung auf eine zur (x, z) -Ebene parallel gelegene Fläche F ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_\xi^{\text{virt}} = \frac{(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\xi}) |F|}{H - \frac{\varepsilon}{2} + h_{p,\xi}}. \quad (3.29)$$

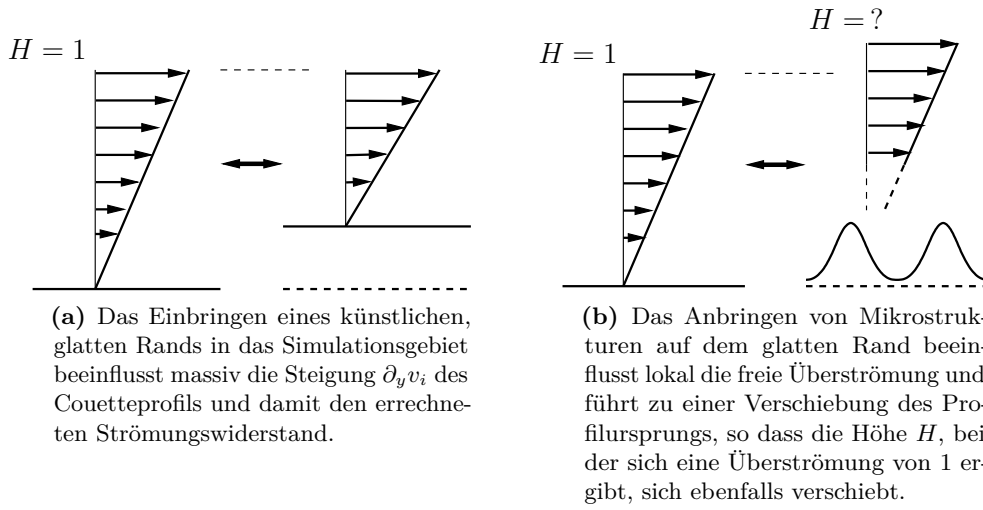


Abbildung 3.9: Zur Frage des Einflusses von Mikrostrukturen im Simulationsgebiet und in der physikalischen Realität

Geometrie	$h_{p,\xi}$	$\mathcal{F}_\xi^{\text{virt}}/ F $	$ \mathcal{F} / F $	rel. Änderung
Riblets	0.03104	1.6051	1.6054	0.2 ‰
Riblets, schmal	0.03614	1.5959	1.5963	0.3 ‰
Noppen	0.06926	1.5384	1.5382	-0.1 ‰
Noppen, schmal	0.08460	1.5132	1.5119	0.9 ‰
Einfacher Stent	0.02927	1.6084	1.6083	-0.1 ‰
Einfacher Stent, schmal	0.03666	1.5950	1.5953	0.2 ‰
Pilzstruktur	0.02906	1.6088	1.6086	-0.1 ‰
Komplexer Stent	0.00963	1.6451	1.6450	-0.1 ‰

Tabelle 3.7: Vergleich des Gesamtströmungswiderstands mit dem Strömungswiderstand des virtuellen Couetteprofils in Überströmungsrichtung ξ

Beweis: Das virtuelle Couetteprofil hat gerade die Höhe $H - \frac{\varepsilon}{2} + h_{p,\xi}$. □

Vergleichen wir zunächst $\mathcal{F}_\xi^{\text{virt}}$ der Überströmungsrichtung mit dem sich ergebenden Gesamtwiderstand (vgl. Tabelle 3.7).

Alle Werte liegen deutlich innerhalb des angenommenen Simulationsfehlers. Einzig die schmale Noppengeometrie kommt mit einer Änderung von 0.9 ‰ an die Schwelle des Simulationsfehlers. Dies ist allerdings auf die deutlich schlechtere Gitterregularität bei der schmalen Noppengeometrie zurückzuführen.

Aus der Tabelle wird also ersichtlich, dass sich für die durchgeführten Simulationen beim Vergleich des Gesamtströmungswiderstandes keine Widerstandsänderung ergibt.

Geometrie	$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_\xi^{\text{virt}}/ F $	$\mathcal{F}_x/ F $	$\mathcal{F}_z/ F $	rel. Änderung	
				$\mathcal{F}_x/ F $	$\mathcal{F}_z/ F $
Riblets	1.1350	1.1222	1.1480	-1.13%	+1.15%
Riblets, schmal	1.1285	1.1118	1.1455	-1.48%	+1.15%
Noppen	1.0878	1.0877	1.0877	-0.01%	-0.01%
Noppen, schmal	1.0700	1.0691	1.0691	-0.09%	-0.09%
Einfacher Stent	1.1373	1.1247	1.1496	-1.11%	+1.08%
Einfacher Stent, schmal	1.1278	1.1122	1.1437	-1.38%	+1.41%
Pilzstruktur	1.1376	1.1248	1.1500	-1.13%	+1.09%
Komplexer Stent	1.1633	1.1679	1.1585	+0.40%	-0.41%

Tabelle 3.8: Vergleich des Strömungswiderstands der einzelnen Strömungskomponenten \mathcal{F}_x , \mathcal{F}_z mit dem entsprechenden Strömungsanteil $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_\xi$ des virtuellen Couetteprofils in Überströmungsrichtung

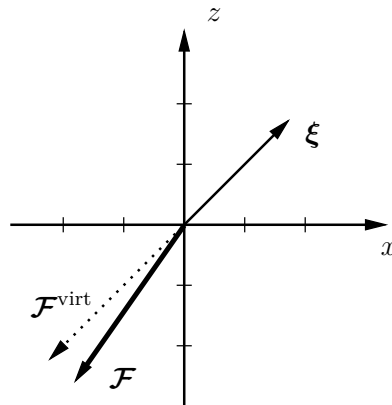


Abbildung 3.10: Umlenkeffekt von Ribletstrukturen: Der Strömungswiderstandsvektor \mathcal{F} wird aus der Überströmungsrichtung ξ heraus zur Querströmungsrichtung z hin rotiert.

Dies ist im simulierten hochviskosen und stationären Fall mit einer Reynoldszahl von $\text{Re}_\tau = 1$ und einer Strukturhöhe von $h^+ = 0.15$ allerdings zu erwarten.

Eine Abschätzung der Wirkungsweise von Ribletstrukturen erhält man beim Vergleich der Widerstandskomponenten in Hauptströmungsrichtung x und Querströmungsrichtung z , d. h. beim Vergleich von $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_\xi^{\text{virt}}$ mit \mathcal{F}_x und \mathcal{F}_z der Simulation (vgl. Tabelle 3.8).

Man sieht, dass sich bei der Ribletstruktur in Querströmungsrichtung z der Widerstand deutlich erhöht und in Hauptströmungsrichtung x erniedrigt. Dies ermöglicht gerade den in Abschnitt 2.3 erörterten Umlenkeffekt der Überströmung in die Hauptströmungsrichtung. Die Noppenstruktur besitzt symmetriebedingt keine solche Widerstandsänderung. Die einfachen Stent- und Pilzstrukturen sind ebenfalls Ribletstrukturen bei denen die Querströmungsrichtung einen erhöhten Widerstand erfährt (vgl. Abb. 3.10).

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass das betrachtete laminare, stationäre Modell

Geometrie	$h_{p,x}$	$h_{p,z}$	$h_{p,x} - h_{p,z}$
Riblets	0.04110	0.02110	0.0200
Riblets, schmal	0.04944	0.02292	0.0265
Noppen	0.06935	0.06935	0.0000
Noppen, schmal	0.08525	0.08525	0.0000
Einfacher Stent	0.03913	0.01974	0.0194
Einfacher Stent, schmal	0.04917	0.02420	0.0250
Pilzstruktur	0.03904	0.01949	0.0196
Komplexer Stent	0.00617	0.01313	-0.0070

Tabelle 3.9: Eindringtiefen der simulierten Geometrien und Differenz der Werte von Haupt- und Querströmungsrichtung

(wie bei einer Strukturhöhe von $h^+ = 0.15$ und $\text{Re}_\tau = 1$ zu erwarten) keine Gesamtwiderstandsänderung von Oberflächenrauheiten gegenüber dem glatten Rand, der in diesem Fall durch das virtuelle Couetteprofil gegeben ist, offenbart. Die Simulationen eignen sich trotzdem um das Verhalten von Oberflächenrauheiten abzuschätzen. Gegenüber dem glatten Rand erhöht sich der Widerstand der Querkomponente und der in Hauptströmungsrichtung erniedrigt sich. Dies führt zum angesprochenen Umlenkeffekt in Hauptströmungsrichtung.

Eine Erweiterung des Modells auf den instationären Fall wird in Kapitel 5 behandelt.

Bemerkung: Die Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ wird häufig auch direkt dazu benutzt, die Wirkungsweise von Riblets abzuschätzen. Je größer die Differenz $h_{p,x} - h_{p,z}$ der Eindringtiefen von Haupt- und Querströmungsrichtung ist, desto größer ist der Umlenkeffekt der Ribletstruktur auf die Überströmung. Ein im Höhenverlauf identisches Strömungsprofil wird in x-Richtung (der Hauptströmungsrichtung der Überströmung) aufgrund der größeren Eindringtiefe einen niedrigeren Strömungswiderstand hervorrufen als das gleiche Profil zur Querströmungsrichtung (vgl. Tabelle 3.9).

3.6.2 Stabilität

Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob der errechnete Wert für die Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ maßgeblich von den Parametern der Simulation (\mathbf{V} , Re_τ , ...) oder von der Oberflächenstruktur abhängt. Um dieser Frage nachzugehen, bestimmten wir h_p ein weiteres Mal aus einer Simulation mit deutlich überhöhter Überströmung $\mathbf{V} = (16, 16)$ (vgl. Tabelle 3.10). Die Abweichungen liegen für alle betrachteten Geometrien innerhalb von 1%. Dies zeigt, dass die Eindringtiefe nur schwach von den Simulationsparametern abhängt. Es sei deshalb eine nur geometrieabhängige, konstante Eindringtiefe mit einem Fehler von 1% für den berechneten Wert angenommen.

Zur weiteren Verifikation von 3.19, wollen wir alle Geometrien mit einer modifizierten

Geometrie	$\mathbf{V} = (1, 1)$		$\mathbf{V} = (16, 16)$		Abweichung	
	$h_{p,x}$	$h_{p,z}$	$h_{p,x}$	$h_{p,z}$	$h_{p,x}$	$h_{p,z}$
Riblets	0.04110	0.02110	0.04111	0.02097	0.2 ‰	-6.2 ‰
Riblets, schmal	0.04944	0.02292	0.04945	0.02279	0.2 ‰	-5.7 ‰
Noppen	0.06935	0.06935	0.06926	0.06925	-1.3 ‰	-1.3 ‰
Noppen, schmal	0.08525	0.08525	0.08460	0.08460	-7.6 ‰	-7.6 ‰
Einfacher Stent	0.03913	0.01974	0.03895	0.01958	-4.6 ‰	-8.1 ‰
Einfacher Stent, schmal	0.04917	0.02420	0.04911	0.02422	-1.2 ‰	0.8 ‰
Pilzstruktur	0.03904	0.01949	0.03903	0.01941	-0.3 ‰	-4.1 ‰
Komplexer Stent	0.00617	0.01313	0.00611	0.01314	-9.7 ‰	0.8 ‰

Tabelle 3.10: Vergleich der Eindringtiefen zweier Überströmungen mit $\mathbf{V} = (1, 1)$ bzw. $\mathbf{V} = (16, 16)$

Geometrie	$ \mathcal{F} /\sqrt{2} F $
Riblets	1.0001
Riblets, schmal	1.0002
Noppen	1.0002
Noppen, schmal	0.9998
Einfacher Stent	1.0001
Einfacher Stent, schmal	1.0002
Pilzstruktur	1.0001
Komplexer Stent	1.0000

Tabelle 3.11: Eine Simulation der Geometrien mit einer modifizierten Höhe von $H = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - h_{p,\xi}$

Höhe $H = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - h_{p,\xi}$ simulieren. Die Ergebnisse müssen in diesem Fall gerade mit einem virtuellen Couette-Profil der Höhe 1 verglichen werden. Es sollte sich also stets ein Gesamtströmungswiderstand von $|\mathcal{F}| = \sqrt{2}$ einstellen. Dies ist der Fall, wie die Ergebnisse in Tabelle 3.11 zeigen.

4 Berechnung des Widerstands mit Hilfe von Zellproblemen

Die *Homogenisierung* ist eine relativ neue Disziplin der reellen Analysis. Sie beschäftigt sich mit der Formulierung effektiver Gleichungssysteme, deren Lösung die Lösung des ursprünglichen Problems im Falle des Kleinwerdens von gewissen Strukturparametern approximiert. Im Gegensatz zur asymptotischen Analysis, bei der rein durch Größenordnungsabschätzungen von Differentialoperatoren und Lösungskomponenten eine Vereinfachung zu erzielen versucht wird, kann man mit der Homogenisierung hierbei eine rigorose Konvergenz bezüglich eines entsprechenden Konvergenzbegriffes zeigen.

Im Folgenden überführen wir das stationäre Modell aus Kapitel 3 in den formalen Rahmen der Homogenisierung und stellen die von Jäger u. Mikelić (1996, 2001, 2003) gefundenen Resultate vor. Diese werden anschließend für eine effiziente Schätzung der in Kapitel 3 errechneten Widerstandswerte und Eindringtiefen benutzt. Der entscheidende Punkt hierbei ist, dass die Widerstandsätzung im Gegensatz zur direkten numerischen Simulation im Fall von Ribletgeometrien über zweidimensionale Zellprobleme berechnet wird, die von wesentlich geringerem rechnerischen Aufwand sind.

4.1 Homogenisierung des Modellproblems

Wir betrachten die folgende – im Vergleich zu Kapitel 3 modifizierte – Formulierung des stationären Modells. Sei

$$Y := \left\{ (x, y, z) \in (0, 1) \times (-1, 0) \times (0, 1) : \Gamma(x, z) < y < 0 \right\}$$

die in Abb. 4.1a gezeigte Zelle mit einer periodischen, durch einen Graphen gegebenen Rauheit Γ . Aus dieser wird nun die Einheitszelle Ω^ε (vgl. Abb. 4.1b) konstruiert:

$$\begin{aligned} Y_{\text{bl}}^\varepsilon &:= \left(\bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} \varepsilon \bar{Y} + (\varepsilon k, 0, \varepsilon l) \right)^\circ \cap (0, L_1) \times (-\varepsilon, 0) \times (0, L_3), \\ \Sigma &:= (0, L_1) \times \{0\} \times (0, L_3), \\ P &:= (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3) \end{aligned}$$

und damit

$$\Omega^\varepsilon := Y_{\text{bl}}^\varepsilon \cup \Sigma \cup P.$$

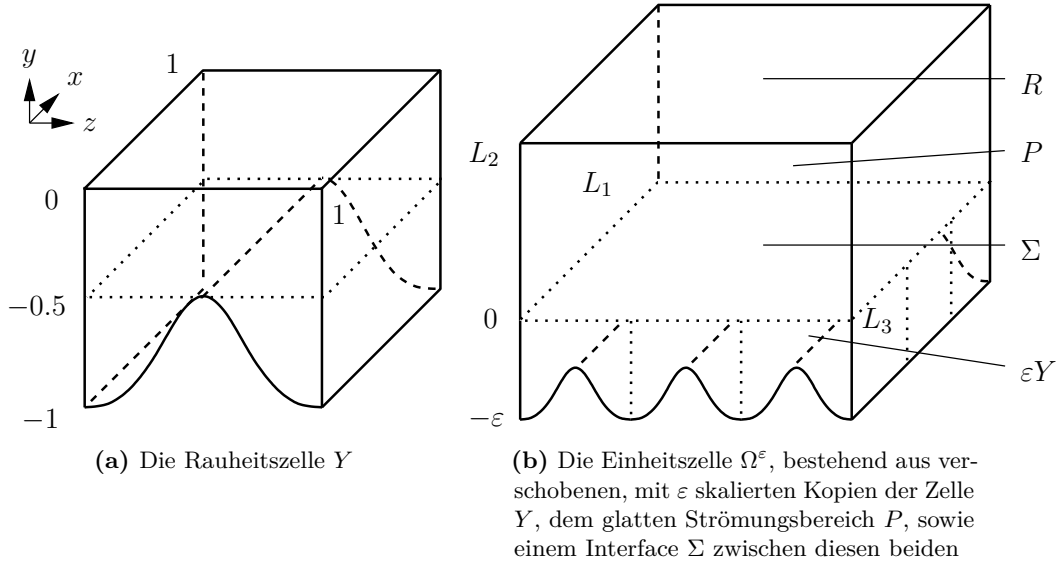


Abbildung 4.1: Zur Definition der Einheitszelle Ω^ε

Im Folgenden sei stets angenommen, dass die Länge und Breite L_1, L_3 der Einheitszelle ganzzahlige Vielfache von ε sind. Wir setzen abschließend noch

$$\tilde{\Omega}^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \cap (0, \varepsilon) \times (-\varepsilon, L_2) \times (0, \varepsilon),$$

d. h. mit $\tilde{\Omega}^\varepsilon$ betrachtet man genau eine reskalierte Kopie der Rauheitszelle Y mit Überströmungsgebiet.

Wir sind nun wieder an einer periodischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen auf Ω^ε interessiert:

Definition 4.1 (Stationäres Modell): Gesucht ist bei einer (räumlich konstanten) Geschwindigkeitsvorgabe \mathbf{V} auf R eine Lösung

$$\mathbf{v}^\varepsilon \in H_{\text{per}}^1(\Omega^\varepsilon)^3,$$

$$p^\varepsilon \in L_{\text{per}}^2(\Omega^\varepsilon) / \mathbb{R}$$

der variationellen Form der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^\varepsilon} (\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = 0, \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{v}^\varepsilon \, \xi \, d\mathbf{x} = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H_{\text{per}}^1(\Omega) ^3, \forall \xi \in L_{\text{per}}^2(\Omega),$$

mit den Randbedingungen $\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{V}$ auf R und $\mathbf{v}^\varepsilon = 0$ auf Γ^ε .

Betreffend der Existenz und der Eindeutigkeit sei die folgende Aussage zitiert:

Proposition 4.1 (Existenz und Eindeutigkeit): Es sei Γ durch einen C_{per}^2 -Graphen gegeben und $|\mathbf{V}| L_2 \leq 2$, sowie $\varepsilon < L_2/2$. Dann besitzt (4.1) eine Lösung $(\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Diese Lösung hat die Regularität

$$(\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^2(\Omega^\varepsilon)^3 \times H^1(\Omega^\varepsilon)/\mathbb{R}$$

und ist bereits $H^1 \times L^2$ -periodisch mit Periode ε , d. h.

$$(\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H_{\text{per}}^1(\tilde{\Omega}^\varepsilon)^3 \times L_{\text{per}}^2(\tilde{\Omega}^\varepsilon)/\mathbb{R}.$$

Ist darüber hinaus ε gegenüber der Dimension von Ω^ε hinreichend klein, d. h. $\varepsilon < C(L_1, L_2, L_3)$, so ist diese Lösung eindeutig in $H_{\text{per}}^1(\Omega^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega^\varepsilon)/\mathbb{R}$.

Beweis: Ein Beweis der Existenzaussage wird in (Jäger u. Mikelić 2003, Theorem 1) geführt. Die Eindeutigkeit folgt nach Theorem 2 des gleichnamigen Papers. Hierauf sei auch für die genaue Form der Kleinheitsbedingung $\varepsilon < C(H)$ verwiesen. \square

Bemerkung: Mit $L_2 = 0.7$ und $L_1 = L_3 = \varepsilon = 0.3$ ergibt sich gerade die in Kapitel 3 betrachtete Geometrie. Man beachte, dass wir im Allgemeinen allerdings eine (L_1, L_3) -Periodizität und keine ε -Periodizität betrachten.

Beweis (von Proposition 3.1 auf Seite 31): An dieser Stelle möchten wir den Beweis von Proposition 3.1 nachholen.

Man stellt fest, dass die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für das System (3.2) gleichbedeutend mit dem Suchen einer Lösung $(\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ von (4.1) im modifizierten Raum

$$(\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H_{\text{per}}^1(\tilde{\Omega}^\varepsilon)^3 \times L_{\text{per}}^2(\tilde{\Omega}^\varepsilon)/\mathbb{R}$$

ist. Diese Periodizität bekommt man durch Proposition 4.1 aber bereits geliefert.

Umgekehrt folgt die Eindeutigkeit ebenfalls aus Proposition 4.1, da jede ε -periodische Lösung von (3.2) auch eine L_1, L_3 -periodische Lösung von (4.1) ist. \square

Die Frage ist nun, ob es möglich ist, das System (4.1) für den Grenzfall kleiner Mikrostrukturen (d. h. kleines ε) durch ein effektives Problem anzunähern, bei dem die Mikrostrukturen nicht mehr aufgelöst werden müssen (vgl. Abb. 4.2).

Das in diesem Zusammenhang von Jäger u. Mikelić (2003) formulierte effektive Strömungsproblem hat die folgende Gestalt:

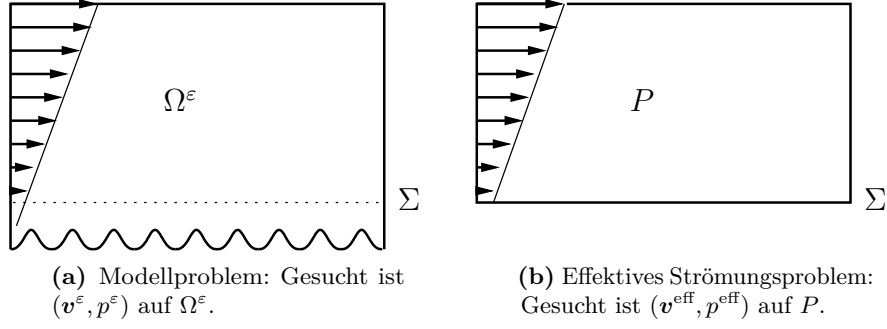


Abbildung 4.2: Zum Homogenisierungsprozess: Ein hinreichend kleiner Strukturparameter ε erlaubt es das ursprüngliche Modellproblem durch ein effektives Strömungsproblem zu approximieren.

Definition 4.2 (Stationäres Modell, Effektives Strömungsproblem): Gesucht ist eine Lösung

$$\mathbf{v}^{\text{eff}} \in H_{\text{per}}^2(P)^3, \quad p^{\text{eff}} \in H_{\text{per}}^1(P)/\mathbb{R},$$

von

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{v}^{\text{eff}} + (\mathbf{v}^{\text{eff}} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{\text{eff}} + \nabla p^{\text{eff}} = 0 & \text{in } P, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{\text{eff}} = 0 & \text{in } P, \\ v_j^{\text{eff}} + \varepsilon M^{j1} \frac{\partial v_1^{\text{eff}}}{\partial x_2} + \varepsilon M^{j3} \frac{\partial v_3^{\text{eff}}}{\partial x_2} = 0 & \text{auf } \Sigma \text{ für } j = 1, 3, \\ v_2^{\text{eff}} = 0 & \text{auf } \Sigma, \\ \mathbf{v}^{\text{eff}} = \mathbf{V} & \text{auf } R, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

mit der noch zu definierenden *Navier-Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} M^{11} & M^{31} \\ M^{13} & M^{33} \end{pmatrix},$$

mit deren Hilfe die Struktur der Rauheit Γ in Y in Form einer *Navier-Slip*-Bedingung in das effektive Strömungsproblem eingeht.

Proposition 4.2 (Existenz und Eindeutigkeit): Das System (4.2) besitzt die Lösung

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} v_1^{\text{eff}} \\ v_3^{\text{eff}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{x_2}{L_2} - 1 \right) \left(\mathbf{I} - \frac{\varepsilon}{L_2} M \right)^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}, \\ v_2^{\text{eff}} = 0, \\ p^{\text{eff}} = 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Gilt weiterhin $|V| L_2 < 2$, so ist diese Lösung eindeutig in $H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 \times L_{\text{per}}^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Beweis: Nachrechnen liefert die erste Aussage. Für die Eindeutigkeit sei auf (Jäger u. Mikelić 2003) verwiesen. \square

Ziel der Homogenisierung ist es nun, eine Konvergenz der Lösung \mathbf{v}^{eff} des effektiven Strömungsproblems gegen die Lösung \mathbf{v}^ε des ursprünglichen Problems für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu zeigen.

Hierzu konstruiert man \mathbf{v}^ε zunächst als eine lokale Störung einer reinen Couette-Strömung \mathbf{v}_0 auf P (d. h. mit Nullrandwerten auf Σ). Dies geschieht durch eine Reihe von Korrekturen, die als Lösungen von Hilfsproblemen formuliert werden. Letztendlich vereinigt man die Korrektur erster Ordnung mit \mathbf{v}_0 zum effektiven Strömungsproblem (4.2) und erhält die Abschätzung

$$\left\| \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{v}^{\text{eff}} \right\|_{L^q(P)^3} \leq \varepsilon^{1-\frac{1}{q}} C \frac{|V|}{L_2} \{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\}, \quad (4.4)$$

mit einer problemabhängigen Konstante C und $q \in \mathbb{R}^+$. Der Leser sei auf die umfangreiche Darstellung in den Arbeiten von Jäger u. Mikelić (1996, 2001, 2003) verwiesen.

4.1.1 Das dreidimensionale Zellproblem

Die Koeffizienten der Navier-Matrix werden durch ein Hilfsproblem bestimmt, welches in erster Ordnung die auf dem Interface auftretenden Normalkräfte korrigiert (vgl. Jäger u. Mikelić 1996, Abschnitt 1.2.9). Um das Zellproblem zu formulieren, definieren wir zunächst:

$$\begin{aligned} Z^+ &= (0, 1) \times (0, +\infty) \times (0, 1), \\ S &= (0, 1) \times \{0\} \times (0, 1), \end{aligned}$$

und setzen $Z_{\text{bl}} = Z^+ \cup S \cup Y$ (vgl. Abb. 4.3).

Definition 4.3 (Dreidimensionales Zellproblem): Zu einer Vorgabe $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ seien

$$\boldsymbol{\beta}^\lambda \in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}})^3 \cap H_{\text{per, loc}}^2(Z^+ \cup Y)^3 \text{ mit } \nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda \in L^2(Z_{\text{bl}})^9 \text{ und}$$

$$\omega^\lambda \in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}}) \text{ mit } \int_S \omega^\lambda \, d\sigma = 0$$

gesucht, die die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \boldsymbol{\beta}^\lambda + \nabla \omega^\lambda = 0 & \text{in } Z^+ \cup Y, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}^\lambda = 0 & \text{in } Z_{\text{bl}}, \\ \left[\left\{ \nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I} \right\} \cdot \mathbf{e}_2 \right]_S = (\lambda_1, 0, \lambda_3) & \text{auf } S, \\ \boldsymbol{\beta}^\lambda = 0 & \text{auf } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

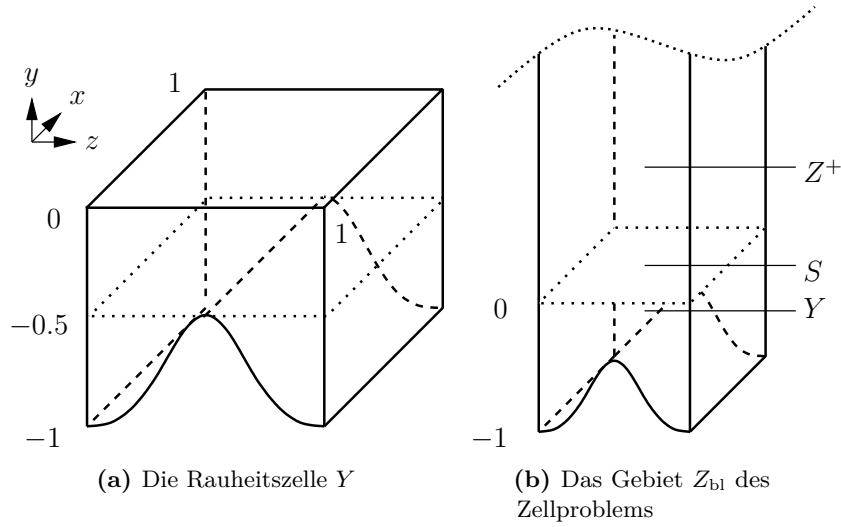


Abbildung 4.3: Zur Definition des Zellproblems auf dem Gebiet Z_{bl}

$[\cdot]_S$ bezeichnet dabei den Sprung über S , d. h. für $f \in H^1(Z^+ \cup Y)$ die Differenz der beiden Spuren:

$$[f]_S = (f|_{Z^+})\Big|_S - (f|_Y)\Big|_S.$$

Bemerkung: Das Zellproblem ist linear, d. h. es gilt stets:

$$\beta^\lambda = \lambda_1 \beta^{e_1} + \lambda_3 \beta^{e_3}, \quad \omega^\lambda = \lambda_1 \omega^{e_1} + \lambda_3 \omega^{e_3}.$$

Proposition 4.3 (Existenz und Eindeutigkeit): Dieses Problem besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Wir skizzieren die von Jäger u. Mikelić (1996) geführte Beweisführung.

Auf dem Raum

$$V := \left\{ \mathbf{v} \in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{bl})^3 : \nabla \mathbf{v} \in L^2(Z_{bl})^9, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, v = 0 \text{ auf } \Gamma \right\}$$

definiert man

$$\|\mathbf{v}\|_V := \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(Z_{bl})^9}.$$

Dies ist eine Norm auf V . Die kritische Eigenschaft ist die Definitheit. Für diese sei aber festgehalten, dass für jedes $h \in \mathbb{R}^+$ eine Poincaré-Ungleichung der Form

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2((0,1) \times (-1,h) \times (0,1))^3} \leq C(h, Y) \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(Z_{bl})^9}$$

gilt. Mit dieser folgt sofort $\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(Z_{\text{bl}})}^9 = 0 \implies \mathbf{v} = 0$ in $L^2_{\text{loc}}(Z_{\text{bl}})^3$.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz besitzt deshalb die Gleichung

$$\int_{Z_{\text{bl}}} \nabla \beta^\lambda \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma \quad \forall \varphi \in V \quad (4.6)$$

eine eindeutige Lösung. Nach dem Theorem von de Rham (vgl. Prop. A.8) folgt die Existenz eines (bis auf eine Konstante eindeutigen) $\omega^\lambda \in L^2_{\text{loc}}(Z_{\text{bl}})$ mit

$$\int_{Z_{\text{bl}}} \nabla \beta^\lambda \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{Z_{\text{bl}}} \omega^\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma \quad \forall \varphi \in H^1_{\text{per, loc}}(Z_{\text{bl}}), \nabla \boldsymbol{\varphi} \in L^2(Z_{\text{bl}})^9. \quad (4.7)$$

Regularitätsaussagen (aufgrund genügend glatter Ränder) liefern

$$\begin{aligned} \beta^\lambda &\in H^2_{\text{per, loc}}(Z^+ \cup Y)^3 \quad \text{und} \\ \omega^\lambda &\in H^1_{\text{per, loc}}(Z_{\text{bl}}). \end{aligned}$$

Die zusätzliche Periodizität folgt aufgrund einer zum Beweis von Proposition 3.2 analogen Diskussion.

Damit existiert zum einen die Spur von ω^λ auf S , so dass ω^λ mit der zusätzlichen Bedingung $\int_S \omega^\lambda \, d\sigma = 0$ eindeutig bestimmt ist. Zum anderen erlaubt diese Eigenschaft es, lokal partiell zu integrieren. Für jede Testfunktion $\boldsymbol{\varphi}$, die auf S verschwindet, reduziert (4.7) auf die Form

$$\int_{Z_{\text{bl}}} \nabla \beta^\lambda \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_{Z_{\text{bl}}} \omega^\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Partielle Integration (man betrachte dazu stets eine beliebige, beschränkte, offene Umgebung mit Testfunktionen mit kompakten Träger in dieser) liefert nun die Gestalt:

$$-\Delta \beta^\lambda + \nabla \omega^\lambda = 0 \quad \text{in } Z^+ \cup Y,$$

Für jeden Quader K , mit parallelen bzw. orthogonalen Seiten zum Interface S (vgl. Abb. 4.4), erhält man beim Testen mit einer Testfunktion $\boldsymbol{\varphi}$ mit kompakten Träger im Inneren von K :

$$\begin{aligned} \int_{S \cap K} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\sigma &= \int_K \nabla \beta^\lambda \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_K \omega^\lambda \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_K (\nabla \beta^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{K_1} (\nabla \beta^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \int_{K_2} (\nabla \beta^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

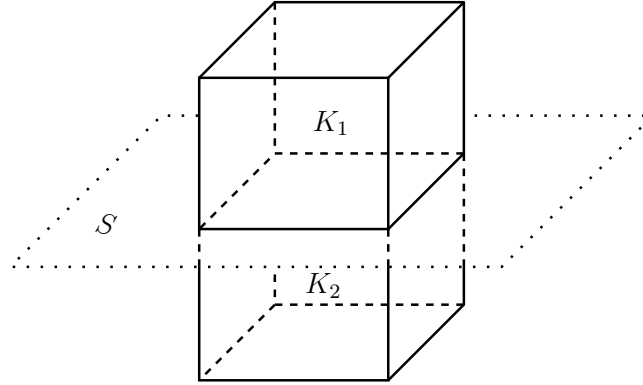


Abbildung 4.4: Zur Wahl des Quaders $K = K_1 \cup K_2$ im Beweis von Proposition 4.3

Partielles Integrieren auf K_1 und K_2 liefert:

$$\begin{aligned} \int_{S \cap K} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{o} &= \int_{\partial K_1} \{(\nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}\} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \\ &\quad \underbrace{\int_{K_1} (\Delta \boldsymbol{\beta}^\lambda - \nabla \omega^\lambda) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}}_{=0} + \int_{\partial K_2} \dots - \int_{K_2} \dots \\ &= \int_{\partial K_1 \cap S} \{(\nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}\} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K_2 \cap S} \dots \\ &= \int_{K \cap S} [(\nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_2]_S \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Bzw. aufgrund der Beliebigkeit von K und $\boldsymbol{\varphi}$:

$$[(\nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda - \omega^\lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_2]_S = \boldsymbol{\lambda} \text{ auf } S.$$

□

Definition 4.4 (Navier-Matrix und Navier-Konstante): Die *Navier-Matrix* sei definiert durch

$$M^{ij} := - \int_S \beta_i^{e_j} \, dx_1 dx_3 \quad \text{für } i, j = 1, 3, \quad (4.8)$$

die *Navier-Konstante* ergibt sich nach

$$C_{\text{bl}}^\lambda := - \int_{Z_{\text{bl}}} |\nabla \boldsymbol{\beta}^\lambda|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Gewisse Symmetrieeigenschaften der periodischen Rauheit führen zu einer signifikanten Vereinfachung der Navier-Matrix und der Zellprobleme. Wir halten im Hinblick auf die numerische Implementierung noch einige solche Resultate fest.

Lemma 4.4: Die Navier-Matrix ist symmetrisch und negativ definit.

Beweis: Testen von (4.6) mit $\varphi = \beta^{e_j}$ für den Fall $\lambda = e_i$ liefert:

$$\int_{Z_{\text{bl}}} \nabla \beta^{e_i} \cdot \nabla \beta^{e_j} \, d\mathbf{x} = \int_S \beta^{e_j} \cdot \mathbf{e}_i \, d\sigma = -M^{ij}.$$

M ist also offensichtlich symmetrisch. Analog sieht man aufgrund der Linearität, dass

$$\lambda \cdot M \cdot \lambda = - \int_S \beta^\lambda \cdot \lambda \, d\sigma = - \int_{Z_{\text{bl}}} |\nabla \beta^\lambda|^2 \, d\mathbf{x}$$

ist, d. h. M ist negativ definit. \square

Lemma 4.5: Besitzt die Rauheitszelle Y bezüglich der x_1 - oder x_3 -Koordinate eine Spiegelsymmetrie, so ist die Navier-Matrix diagonal. Weiterhin ergibt sich diese dann direkt zu

$$M = \begin{pmatrix} C_{\text{bl}}^{e_1} & 0 \\ 0 & C_{\text{bl}}^{e_3} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Es habe ohne Einschränkung Γ eine Spiegelsymmetrie bezüglich x_1 , d. h.

$$\Gamma(x_1, x_3) = \Gamma(1 - x_1, x_3).$$

Es sei $(\beta^{e_3}, \omega^{e_3})$ die Lösung des Zellproblems mit $\lambda = e_3$. Definiere

$$\begin{aligned} \beta' &:= \begin{pmatrix} -\beta_1^{e_3} \\ \beta_2^{e_3} \\ \beta_3^{e_3} \end{pmatrix} (1 - x_1, x_2, x_3) \\ \omega' &:= \omega^{e_3} (1 - x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Aufgrund der Spiegelsymmetrie ist (β', ω') wieder ein Element des im Zellproblem (4.2) betrachteten Raums. Weiterhin überzeugt man sich leicht, dass (β', ω') wieder eine Lösung von (4.2) mit $\lambda = e_3$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit ist damit

$$\beta^{e_3}_1 (1 - x_1, x_2, x_3) = -\beta^{e_3}_1 (x_1, x_2, x_3).$$

Es folgt sofort:

$$M^{13} = - \int_S \beta^{e_3}_1 \, d\sigma = - \int_{S, x_1 < 0.5} \beta^{e_3}_1 \, d\sigma - \int_{S, x_1 > 0.5} \beta^{e_3}_1 \, d\sigma = 0.$$

Die Äquivalenz von M^{11} zu $C_{\text{bl}}^{e_1}$, bzw. M^{33} zu $C_{\text{bl}}^{e_3}$ folgt bereits aus dem Beweis des vorangegangenen Lemmas. \square

4.1.2 Die zweidimensionalen Zellprobleme für Ribletstrukturen

Im Fall von Ribletstrukturen, d. h. Γ besitzt keine x_1 -Abhängigkeit, kann das Zellproblem auf zwei zweidimensionale Hilfsprobleme reduziert werden:

Proposition 4.6 (Laplaceartiges Zellproblem in 2D): Für $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}_1$ hat (4.5) im Fall von Riblets (d. h. keine x_1 -Abhängigkeit der Rauheit) die Lösung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{e_1}(\mathbf{x}) &= (\beta_1^{e_1}(x_2, x_3), 0, 0), \\ \omega^{e_1}(\mathbf{x}) &= 0,\end{aligned}$$

wobei $\beta_1^{e_1} \in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}} \cap \{x_1 = 0\})$ mit $\nabla \beta^{e_1} \in L^2(Z_{\text{bl}} \cap \{x_1 = 0\})^4$ bestimmt ist durch das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) \beta_1^{e_1} = 0 & \text{in } (Z^+ \cup Y) \cap \{x_1 = 0\}, \\ [\partial_{x_2} \beta_1^{e_1}]_S(\cdot, 0) = 1 & \text{auf } S \cap \{x_1 = 0\}, \\ \beta_1^{e_1} = 0 & \text{auf } \Gamma \cap \{x_1 = 0\}. \end{array} \right.$$

Proposition 4.7 (Stokesartiges Zellproblem in 2D): Für $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}_3$ hat 4.5 im Fall von Riblets (d. h. keine x_1 -Abhängigkeit der Rauheit) die Lösung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{e_3}(\mathbf{x}) &= (0, \beta_2^{e_3}(x_2, x_3), \beta_3^{e_3}(x_2, x_3)), \\ \omega^{e_3}(\mathbf{x}) &= \omega^{e_3}(x_2, x_3),\end{aligned}$$

wobei $\beta_2^{e_3}, \beta_3^{e_3} \in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}} \cap \{x_1 = 0\})$ mit $\nabla \beta_2^{e_3}, \nabla \beta_3^{e_3} \in L^2(Z_{\text{bl}} \cap \{x_1 = 0\})^4$ und $\omega^{e_3} \in H_{\text{loc}}^1(Z_{\text{bl}} \cap \{x_1 = 0\})$ bestimmt sind durch das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) \beta_j^{e_3} + \partial_{x_j} \omega^{e_3} = 0 & \text{in } (Z^+ \cup Y) \cap \{x_1 = 0\} \text{ für } j = 2, 3, \\ \partial_{x_2} \beta_2^{e_3} + \partial_{x_3} \beta_3^{e_3} = 0 & \text{in } Z_{\text{bl}} \cap \{x_1 = 0\}, \\ [\partial_{x_2} \beta_2^{e_3} - \omega^{e_3}]_S = 0 & \\ [\partial_{x_2} \beta_3^{e_3}] = 1 & \text{auf } S \cap \{x_1 = 0\}, \\ \boldsymbol{\beta}^{e_3} = 0 & \text{auf } \Gamma \cap \{x_1 = 0\}. \end{array} \right.$$

Beweis (von Proposition 4.6 und 4.7): Der Beweis der eindeutigen Lösbarkeit der zweidimensionalen Probleme folgt analog zum dreidimensionalen Fall.

Die daraus für den dreidimensionalen Fall konstruierten Lösungskomponenten liegen alle (aufgrund der Ribletstruktur) in den in (4.5) betrachteten Räumen $H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}})$

bzw. $L^2_{\text{loc}}(Z_{\text{bl}})/\mathbb{R}$. Weiterhin sieht man durch Einsetzen, dass sie das Zellproblem für $\lambda = e_1$, bzw. $\lambda = e_3$ lösen. Die Eindeutigkeit des Zellproblems liefert dann die Behauptung. \square

4.1.3 Schätzung von Strömungswiderstand und Eindringtiefe

Wir haben in Abschnitt 3.6.1 gesehen, dass man über die Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ der Überströmung einer periodischen Oberflächenrauheit und durch das damit verbundene virtuelle Couetteprofil (welches gerade seinen Ursprung bei einer Eindringtiefe von $h_{p,\xi}$ in die Ribletstruktur hat) den Strömungswiderstand \mathcal{F}_ξ durch eine Schätzung $\mathcal{F}_\xi^{\text{virt.}}$ approximieren kann. Etwas Ähnliches ist auch im Fall des effektiven Strömungsproblems möglich.

Nach Gleichung (4.4) approximiert \mathbf{v}^{eff} die Strömung \mathbf{v}^ε in P (für hinreichend kleines ε) und beschreibt dort gerade das in (4.3) gegebene Couetteprofil. Dies ist also eine dem (in Abschnitt 3.6 beschriebenen) Anlegen eines virtuellen Couetteprofils analoge Situation und impliziert, dass die *Eindringtiefe* $h_{p,i}^{\text{eff}}$ der effektiven Strömung \mathbf{v}^{eff} diejenige von \mathbf{v}^ε approximiert. Wir halten fest:

Lemma 4.8 (Eindringtiefe der effektiven Strömung): Die in Proposition 4.2 gegebene Lösung (4.3) des effektiven Strömungsproblems weist in x_i -Richtung den Strömungsursprung bei

$$\hat{y} = \varepsilon C_{\text{bl}}^{e_i}$$

auf, d. h. es ist

$$\mathbf{v}^{\text{eff}}(\hat{y}) \cdot \mathbf{e}_i = 0.$$

Die Oberflächenrauheiten haben eine Strukturhöhe von $\varepsilon/2$ und ihren Ursprung bei $-\varepsilon$ (vgl. Abb. 4.1b). D. h. die *Eindringtiefe* $h_{p,i}^{\text{eff}}$ der effektiven Strömung in x_i -Richtung ist gerade

$$h_{p,i}^{\text{eff}} = -\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon C_{\text{bl}}^{e_i}. \quad (4.9)$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar durch Lösen von $\mathbf{v}^{\text{eff}}(\hat{y}) \cdot \mathbf{e}_i = 0$ mit dem in (4.3) angegebenen \mathbf{v}^{eff} . \square

Dieses Lemma ermöglicht es, einen Widerstand mit Hilfe des Zellproblems direkt zu schätzen. Die effektive Strömung übt (da sie eine Couetteströmung ist) auf jede zum

Interface S parallele Fläche F die Kraft

$$\mathcal{F}_i^{\text{eff}} = \frac{V_i |F|}{L_2 - \varepsilon C_{\text{bl}}^{e_i}} \quad (4.10)$$

aus. Dies approximiert zunächst die Kraft, die die Strömung \mathbf{v}^ε auf das Interface S ausübt. In Abschnitt 3.6.1 haben wir aber gerade gesehen, dass eine solche Approximation durch ein Couetteprofil v_i^{virt} mit einer zugehörigen Kraftkomponente $\mathcal{F}_i^{\text{virt}}$ den Strömungswiderstand \mathcal{F}_i von \mathbf{v}^ε bereits sehr gut approximiert. Dies motiviert (4.10) für eine Schätzung des Strömungswiderstands \mathcal{F}_i heran zu ziehen.

4.2 Direkte numerische Simulation

Die Gleichungen (4.9) und (4.10) ermöglichen es, mit $h_{p,i}^{\text{eff}}$ und $\mathcal{F}_i^{\text{eff}}$ die Eindringtiefe und den Strömungswiderstand mit Hilfe der formulierten Zellprobleme zu schätzen. Die Besonderheit hierbei ist, dass sich im Fall von Ribletstrukturen das Zellproblem auf ein zweidimensionales stokes- bzw. laplaceartiges Zellproblem reduziert, was zu einer großen Verringerung des Rechenaufwands führt.

Wir wollen im Folgenden für die in Abschnitt 2.3 vorgestellten Geometrien die entsprechenden Zellprobleme lösen und die erhaltenen Schätzwerte mit denen der direkten numerischen Simulation vergleichen.

4.2.1 Implementierungsaspekte

Die Zellprobleme werden für die numerische Berechnung wieder schwach formuliert. Nach dem Beweis von Proposition 4.3 (vgl. Gleichung 4.7) ist (4.5) gerade äquivalent zu folgender Formulierung:

Definition 4.5 (Zellproblem in 3D, variationelle Formulierung): Zu einem vorgegebenen $(\lambda_1, 0, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ sind

$$\begin{aligned} \beta^\lambda &\in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}})^3 \text{ mit } \nabla \beta^\lambda \in L^2(Z_{\text{bl}})^9 \text{ und} \\ \omega^\lambda &\in L_{\text{loc}}^2(Z_{\text{bl}}) \text{ mit } \int_S \omega^\lambda \, d\sigma = 0 \end{aligned}$$

gesucht, so dass

$$\left\{ \begin{aligned} (\nabla \beta^\lambda, \nabla \varphi) - (\omega^\lambda, \nabla \cdot \varphi) &= \lambda \cdot \delta_S^3(\varphi), \\ (\nabla \cdot \beta^\lambda, \xi) &= 0 \\ \forall \varphi &\in H_{\text{per, loc}}^1(Z_{\text{bl}})^3, \nabla \varphi \in L^2(Z_{\text{bl}})^9, \forall \xi \in L_{\text{loc}}^2(Z_{\text{bl}}). \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

Hierbei bezeichnet $\delta_S^3(\cdot)$ die komponentenweise *Dirac-Distribution* auf dem Interface S , d. h.

$$\int_{Z_{\text{bl}}} \delta_S^3(\varphi) \, d\mathbf{x} = \int_S \varphi \, d\mathbf{o}$$

für $\varphi \in H^1(Z_{\text{bl}})^3$.

Die erste Schwierigkeit bei der numerischen Implementierung von (4.11) stellt die Unbeschränktheit des Gebietes Z_{bl} dar. Da sich aus analytischer Sicht oberhalb des Interfaces S ein konstanter Wert für $(\beta^\lambda, \omega^\lambda)$ einstellt (dies ist durch $\nabla \beta^\lambda \in L^2(Z_{\text{bl}})$ garantiert), ist es gerechtfertigt, ab einer geeigneten Höhe abzuschneiden. Für den entstehenden Rand R wählen wir natürliche Randbedingungen, d. h. wir lassen in der variationellen Formulierung die entsprechenden Randdaten frei. Zu Beachten ist, dass man dadurch bei der Überführung der variationellen Form (4.11) in die starke Formulierung (4.5) durch partielle Integration die Randbedingung

$$\int_R \varphi \cdot (\nabla \beta^\lambda) \cdot \mathbf{n} - \varphi \cdot \omega^\lambda \mathbf{n} \, d\mathbf{o} \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega)^3 \quad (4.12)$$

erhält. Diese *natürliche Randbedingung* legt also bereits eine Drucknormierung fest, so dass wir auf die Bedingung $\int_S \omega^\lambda \, d\mathbf{o} = 0$ zur Sicherung der eindeutigen Lösbarkeit verzichten können.

Ein weiterer kritischer Punkt ist die Dirac-Distribution. Um weiterhin eine numerische Quadratur zu ermöglichen, muss diese als regularisierte, gitterabhängige Funktion implementiert werden. Als eine geschickte Wahl hat sich

$$\delta_d(x_2) := \begin{cases} \frac{1}{2d} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi x_2}{d} \right) \right) & \text{für } |x_2| \leq d, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.13)$$

mit einem geeignet zu wählenden Parameter d erwiesen.

Das variationelle Problem (4.11) wird nun analog zur direkten numerischen Simulation mit den in Kapitel 3.3 angesprochenen Finite-Elemente-Verfahren berechnet. Wir sind dabei an der quantitativen Berechnung der Komponenten der Navier-Matrix M interessiert, d. h. nach Lemma 4.4 an einer möglichst genauen Berechnung von

$$C_{\text{bl}}^{e_i} = - \int_{Z_{\text{bl}}} |\nabla \beta^{e_i}|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Das für die lokale Verfeinerungsstrategie notwendige duale Problem besitzt aufgrund der Linearität von (4.11) die einfache Gestalt: Suche $z = (\mathbf{w}, r)$ mit

$$(\nabla \varphi, \nabla z) - (\xi, \nabla \cdot z) + (\nabla \cdot \varphi, r) = (C_{\text{bl}}^{e_i})'_{\beta^{e_i}}(u) [\varphi] \quad \forall (\varphi, \xi),$$

$$(C_{\text{bl}}^{e_i})'_{\beta^{e_i}}(u) [\varphi] = -2 \int_{Z_{\text{bl}}} \nabla \beta^{e_i} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x}.$$

Höhe H über Interface S	$C_{\text{bl}}^{e_3}$ (extrapoliert)
1.5	0.57036(2)
2.5	0.57029(2)
3.5	0.57024(4)
4.5	– Oszillation –

Tabelle 4.1: Extrapolierter Wert von $C_{\text{bl}}^{e_3}$ für die Ribletgeometrie für unterschiedliche Höhen des zweidimensionalen, stokesartigen Zellproblems

Skalierung d/h	$C_{\text{bl}}^{e_3}$ (extrapoliert)
1.0	– zu gering –
1.5	0.57029(2)
2.0	0.57031(3)
2.5	– zu groß –

Tabelle 4.2: Extrapolierter Wert von $C_{\text{bl}}^{e_3}$ für die Ribletgeometrie für unterschiedliche Skalierungen des Parameters d der regularisierten Dirac-Distribution (4.13) zur Zellgröße h

Bemerkung: Alle angesprochenen Überlegungen können ohne Modifikation auch auf die vorgestellten zweidimensionalen Zellprobleme angewendet werden. Es sei deshalb auf eine explizite Darstellung verzichtet.

4.2.2 Parameterwahl

Die beiden unbekannt Parameter der Simulation, nämlich die Höhe H , ab der das Gebiet abgeschnitten wird, sowie die Skalierung mit der die lokale Zellweite h in die regularisierte Dirac-Funktion (4.13) eingeht, müssen noch bestimmt werden.

Zur Abschätzung der notwendigen Höhe simulieren wir ein ausgewähltes Zellproblem für verschiedene Höhen (vgl. Tabelle 4.1). Die Wahl einer Höhe von $H = 2.5$ ist als Kompromiss zwischen möglichst geringem Einfluss des künstlichen Rands auf die Sprungstelle S und damit auf das Ergebnis zum einen, und möglichst geringem numerischen Rechenaufwand zum anderen, günstig.

Bei der Wahl der richtigen Skalierung des Parameters d der regularisierten Dirac-Distribution δ_d mit dem Zelldurchmesser h ist Vorsicht geboten. Diese darf nicht zu klein gewählt werden, da sonst die numerische Quadratur bei der Berechnung der diskreten Probleme die Dirac-Distribution nicht genügend „sieht“. Eine zu große Skalierung führt hingegen zu Problemen mit der lokalen Verfeinerung. Eine Skalierung von $d = 1.5h$ erweist sich nach Tabelle 4.2 als günstig.

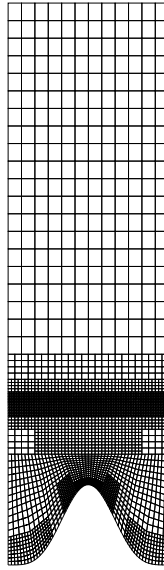


Abbildung 4.5: Lokale Verfeinerung beim zweidimensionalen laplaceartigen Zellproblem der Ribletstruktur: Zu erkennen ist, dass an den beiden „Problemstellen“ das Gitter lokal verfeinert wird – am Interface S , bei dem die regularisierte Dirac-Distribution für einen großen Fehlerbeitrag sorgt, sowie am gekrümmten Rand der Oberflächenrauheit.

4.2.3 Ergebnisse

Die numerischen Ergebnisse der zweidimensionalen Zellprobleme für Ribletgeometrien sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst. Für die restlichen Geometrien, bei denen das volle dreidimensionale Zellproblem berechnet werden muss, werden die Ergebnisse in Tabelle 4.4 vorgestellt.

Man sieht, dass aufgrund der regularisierten Dirac-Distribution in der Problemformulierung der Diskretisierungsfehler pro Level deutlich größer ist als bei der direkten numerischen Simulation, d. h. die Einzelergebnisse pro Gitterlevel weichen deutlich systematisch vom extrapolierten Wert ab.

Prinzipiell ist auch in diesem Fall die kritische Betrachtung in Abschnitt 3.5.1 für die numerische Simulation zu beachten. Eine heuristische Fehlerabschätzung, wie sie in Abschnitt 3.5.1 für die dreidimensionale Simulation durchgeführt wurde, zeigt aber auch hier, dass man dem Ergebnis im 1 %-Bereich vertrauen kann. Darüber hinaus zeigt eine Betrachtung der entstehenden Gitter (vgl. Abb. 4.5), dass die lokale Verfeinerungsstrategie das Gitter auch an den zu erwartenden „Problemstellen“ verfeinert – nämlich an der Sprungstelle am Interface S , wo die regularisierte Dirac-Distribution für einen großen Fehlerbeitrag sorgt, und am gekrümmten Rand der Oberflächenrauheit.

Lvl	Laplace		Stokes		#Zellen	Laplace		Stokes	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$		$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$	
3	1680	0.622450	1872	0.558255	1776	0.650092	1200	0.553403	
4	3888	0.628625	4032	0.563769	3696	0.656268	2448	0.564619	
5	6720	0.631712	7968	0.566504	7296	0.659356	5088	0.570127	
6	12864	0.633256	14544	0.567869	13632	0.660900	9792	0.572863	
7	23808	0.634028	26928	0.568551	25824	0.661672	16992	0.574229	
8	45504	0.634414	50352	0.568893	47040	0.662058	31008	0.574912	
9	86592	0.634607	94752	0.569063	89472	0.662251	55968	0.575253	
10	167040	0.634704	178128	0.569149	172512	0.662348	102048	0.575423	
extr.		0.634801		0.569223		0.662443		0.575566	

(a) Ribletstruktur

Lvl	Laplace		Stokes		#Zellen	Laplace		Stokes	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$		$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$	
3	2384	0.618203	2384	0.554211	3840	0.657341	3840	0.574705	
4	4880	0.623803	4928	0.559830	6672	0.660841	7152	0.578322	
5	8192	0.626603	9152	0.562630	12816	0.662588	13872	0.580083	
6	14336	0.628002	15776	0.564030	22800	0.663461	25536	0.580957	
7	26240	0.628702	27872	0.564730	41088	0.663898	48384	0.581393	
8	47456	0.629052	50912	0.565080	77568	0.664116	85200	0.581612	
9	90272	0.629227	97232	0.565255	147744	0.664225	158544	0.581721	
10	172256	0.629315	180128	0.565342	280704	0.664280	301776	0.581775	
extr.		0.629376		0.565399		0.664344		0.581846	

(b) Ribletstruktur, schmal

Lvl	Laplace		Stokes		#Zellen	Laplace		Stokes	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$		$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$	
3	2320	0.612462	2224	0.547838	2224	0.547838	2224	0.547838	
4	4432	0.619712	4432	0.555123	4432	0.555123	4432	0.555123	
5	8272	0.623556	8944	0.558970	8944	0.558970	8944	0.558970	
6	15472	0.625368	16624	0.560783	16624	0.560783	16624	0.560783	
7	28816	0.626329	30640	0.561744	30640	0.561744	30640	0.561744	
8	54928	0.626782	58576	0.562197	58576	0.562197	58576	0.562197	
9	105616	0.627022	111088	0.562437	111088	0.562437	111088	0.562437	
10	205456	0.627136	212032	0.562550	212032	0.562550	212032	0.562550	
extr.		0.627247		0.562661		0.562661		0.562661	

(c) Einfache Stentstruktur

Lvl	Laplace		Stokes		#Zellen	Laplace		Stokes	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$		$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$	
3	2320	0.612462	2224	0.547838	2224	0.547838	2224	0.547838	
4	4432	0.619712	4432	0.555123	4432	0.555123	4432	0.555123	
5	8272	0.623556	8944	0.558970	8944	0.558970	8944	0.558970	
6	15472	0.625368	16624	0.560783	16624	0.560783	16624	0.560783	
7	28816	0.626329	30640	0.561744	30640	0.561744	30640	0.561744	
8	54928	0.626782	58576	0.562197	58576	0.562197	58576	0.562197	
9	105616	0.627022	111088	0.562437	111088	0.562437	111088	0.562437	
10	205456	0.627136	212032	0.562550	212032	0.562550	212032	0.562550	
extr.		0.627247		0.562661		0.562661		0.562661	

(d) Einfache Stentstruktur, schmal

Lvl	Laplace		Stokes		#Zellen	Laplace		Stokes	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$		$-C_{bl}^{e1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e3}$	
3	2320	0.612462	2224	0.547838	2224	0.547838	2224	0.547838	
4	4432	0.619712	4432	0.555123	4432	0.555123	4432	0.555123	
5	8272	0.623556	8944	0.558970	8944	0.558970	8944	0.558970	
6	15472	0.625368	16624	0.560783	16624	0.560783	16624	0.560783	
7	28816	0.626329	30640	0.561744	30640	0.561744	30640	0.561744	
8	54928	0.626782	58576	0.562197	58576	0.562197	58576	0.562197	
9	105616	0.627022	111088	0.562437	111088	0.562437	111088	0.562437	
10	205456	0.627136	212032	0.562550	212032	0.562550	212032	0.562550	
extr.		0.627247		0.562661		0.562661		0.562661	

(e) Pilzstruktur

Tabelle 4.3: Ergebnisse der zweidimensionalen Zellprobleme (Proposition 4.6 u. 4.7) für die simulierten Ribletgeometrien

Lvl	Stokes $\lambda = e_1$		Stokes $\lambda = e_3$		Stokes $\lambda = e_1$		Stokes $\lambda = e_3$	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e_1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e_3}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e_1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e_3}$
1	4032	0.688038	4032	0.688038	4032	0.747092	4032	0.747092
2	16128	0.706318	16128	0.706318	12096	0.730603	12096	0.730603
3	71680	0.717627	71680	0.717627	50176	0.755618	50176	0.755618
4	293888	0.723245	293888	0.723245	197120	0.768363	197120	0.768363
5	1035776	0.726048	1035776	0.726048	680960	0.774751	680960	0.774751
extr.		0.729755		0.729755		0.782733		0.782733

(a) Noppenstruktur

Lvl	Stokes $\lambda = e_1$		Stokes $\lambda = e_3$	
	#Zellen	$-C_{bl}^{e_1}$	#Zellen	$-C_{bl}^{e_3}$
1	5376	0.534051	5376	0.560985
2	32704	0.497569	34944	0.521074
3	122752	0.509250	137088	0.532303
4	477568	0.514882	556416	0.537811
extr.		0.519647		0.542713

(b) Noppenstruktur, schmal

(c) Komplexer Stent

Tabelle 4.4: Ergebnisse des dreidimensionalen Zellproblems (4.5) für die simulierten, dreidimensionalen Strukturen

4.2.4 Vergleich der Eindringtiefe und des Strömungswiderstands

In Tabelle 4.5 wird die Eindringtiefe $h_{p,i}$ der direkten numerischen Simulation mit der Schätzung $h_{p,i}^{\text{eff}}$ nach (4.9) aus dem Zellproblem verglichen. Es fällt auf, dass die Eindringtiefe durch die Schätzung $h_{p,i}^{\text{eff}}$ systematisch um etwa 1 – 2% unterschätzt wird. Die etwas größere Abweichung bei der Pilz- und komplexen Stentstruktur ist wieder auf die geometriebedingte, niedrigere Gitterregularität zurückzuführen.

Abschließend sei in Tabelle 4.6 noch der Strömungswiderstand \mathcal{F}_i der direkten numerischen Simulation mit der Schätzung $\mathcal{F}_i^{\text{eff}}$ nach (4.10) verglichen. Es ergibt sich analog zur Eindringtiefe wieder eine systematische Abweichung; der Strömungswiderstand wird systematisch überschätzt. Die maximal auftretende Abweichung von 1% liegt aber bereits im angenommenen Simulationsfehler. Dies bedeutet, dass wir für die vorgestellten Geometrien in der Lage sind, den Strömungswiderstand des stationären Modells mit Hilfe von Zellproblemen innerhalb des Simulationsfehlers des Modells zu schätzen – und dies im Fall von Ribletstrukturen mit deutlich geringerem rechnerischem Aufwand. (Bei der Implementierung in GASCOIGNE waren die zweidimensionalen Zellprobleme bis zu 40 mal so schnell berechnet.)

Geometrie	$h_{p,x}$	$h_{p,x}^{\text{eff}}$	Abw.	$h_{p,z}$	$h_{p,z}^{\text{eff}}$	Abw.
Riblets	0.04110	0.04044	1.6 %	0.02110	0.02077	1.6 %
Riblets, schmal	0.04944	0.04873	1.4 %	0.02292	0.02267	1.1 %
Noppen	0.06935	0.06893	0.6 %	0.06935	0.06893	0.6 %
Noppen, schmal	0.08525	0.08482	0.5 %	0.08525	0.08482	0.5 %
Einfacher Stent	0.03913	0.03881	0.8 %	0.01974	0.01962	0.6 %
Einfacher Stent, schmal	0.04917	0.04930	0.3 %	0.02420	0.02455	1.4 %
Pilzstruktur	0.03904	0.03817	2.2 %	0.01949	0.01890	3.0 %
Komplexer Stent	0.00617	0.00589	4.5 %	0.01313	0.01281	2.4 %

Tabelle 4.5: Vergleich der aus der direkten numerischen Simulation errechneten Eindringtiefe $h_{p,i}$ (vgl. Tabelle 3.6) mit der Schätzung $h_{p,i}^{\text{eff}}$ aus dem Zellproblem nach (4.9)

Geometrie	$\mathcal{F}_{h,x}/ F $	$\mathcal{F}_x^{\text{eff}}/ F $	Abw.	$\mathcal{F}_{h,z}/ F $	$\mathcal{F}_z^{\text{eff}}/ F $	Abw.
Riblets	1.1222	1.1230	0.7 ‰	1.1480	1.1484	0.4 ‰
Riblets, schmal	1.1118	1.1127	0.8 ‰	1.1455	1.1459	0.4 ‰
Noppen	1.0877	1.0883	0.6 ‰	1.0877	1.0883	0.6 ‰
Noppen, schmal	1.0691	1.0697	0.6 ‰	1.0691	1.0697	0.6 ‰
Einfacher Stent	1.1247	1.1251	0.4 ‰	1.1496	1.1499	0.3 ‰
Einfacher Stent, schmal	1.1122	1.1120	0.2 ‰	1.1437	1.1434	0.3 ‰
Pilzstruktur	1.1248	1.1259	1.0 ‰	1.1500	1.1510	0.9 ‰
Komplexer Stent	1.1679	1.1684	0.4 ‰	1.1585	1.1590	0.4 ‰

Tabelle 4.6: Vergleich des aus der direkten numerischen Simulation errechneten Strömungswiderstands \mathcal{F}_i (vgl. Tabelle 3.4 u. 3.5) mit der Schätzung $\mathcal{F}_i^{\text{eff}}$ aus dem Zellproblem nach (4.10)

4.3 Erweiterung der Homogenisierung auf quasistationäre Probleme

Zum Abschluss des Kapitels sei ein numerischer Test für eine mögliche Erweiterung der Homogenisierung auf den Fall einer zeitabhängigen Überströmung gegeben. Es wird wieder eine (im Ort) periodische Strömung in Ω^ε (vgl. 3.1 bzw. 4.1b) betrachtet. Diese soll diesmal den zeitabhängigen, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen genügen.

Der essentielle Schritt für die Homogenisierung des stationären Modells ist die (örtliche) Periodisierung des Ansatzraumes. Im Hinblick auf eine mögliche Homogenisierung des instationären Falls fordern wir deshalb die Periodisierung auch in der Zeit:

Definition 4.6 (Quasistationäres Modell, starke Formulierung): Gegeben sei eine rein zeitabhängige Überströmungsvorgabe $\mathbf{V}(t)$ auf R , die T -periodisch in der Zeit ist.

Gesucht ist ein ebenfalls zeitabhängiges, T -periodisches Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} und ein Druck p , so dass die zeitabhängigen, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen erfüllt

Geometrie	$\int \mathcal{F}_x dt$	$\int \mathcal{F}_x^{\text{eff}} dt$	Abweichung
Ribletstruktur	0.24349	0.24346	0.7 ‰
Noppenstruktur	0.23589	0.23593	0.2 ‰
Komplexe Stentstruktur	0.25322	0.25330	0.3 ‰

Tabelle 4.7: Vergleich des zeitlichen Mittelwertes des Strömungswiderstands in Hauptströmungsrichtung mit dem Schätzwert nach Gleichung (4.15)

sind:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{auf } \Gamma, \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{V}(t) & \text{auf } R. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Die Idee ist nun, das Ergebnis der Homogenisierung des stationären Modells in Form von Gleichung (4.10),

$$\mathcal{F}_i^{\text{eff}} = \frac{V_i |F|}{L_2 - \varepsilon C_{\text{bl}}^{e_i}}$$

betrachten und im Rahmen einer „heuristischen“ Vorgehensweise alle zeitabhängigen Größen zeitlich zu mitteln:

$$\int \mathcal{F}_i^{\text{eff}} dt = \frac{|F|}{L_2 - \varepsilon C_{\text{bl}}^{e_i}} \int V_i dt. \quad (4.15)$$

Dies soll nun einen Schätzwert für den zeitlichen Mittelwert des Strömungswiderstands $\int \mathcal{F}_i dt$ darstellen.

Nachrechnen mit einer Überströmungsvorgabe

$$\mathbf{V}(t) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

für die Riblet- und Noppenstruktur, sowie für die komplexe Stentstruktur liefert das in Tabelle 4.7 zusammengefasste Ergebnis. Die Abweichungen sind vergleichbar klein wie im Fall der Schätzung des stationären Strömungswiderstands durch das Zellproblem, d. h. die Schätzung eignet sich (deutlich innerhalb des angenommenen Simulationsfehlers), um das Ergebnis der vollen numerischen Simulation des quasistationären Modells mit Hilfe des *stationären* Zellproblems zu berechnen.

5 Ein instationäres Modell

Die größte Problematik des bisher betrachteten stationären Modells ist die fehlende Zeitabhängigkeit, da aufgrund dieser die in Kapitel 2 beschriebenen Mechanismen der Einflussnahme von Ribletstrukturen auf die turbulente Überströmung schwer erkennbar sind (vgl. Abschnitt 3.2 u. 3.6).

Aus diesem Grund soll zum Abschluss das Modell auf den instationären Fall erweitert werden. Gleichzeitig werden die betrachteten Mikrostrukturen auf eine Höhe von $h^+ = 6 - 9$ vergrößert, so dass diese im Gegensatz zum stationären Fall mit einer Strukturhöhe von $h^+ = 0.15$ in dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen optimalen Wirkungsbereich liegen.

5.1 Modellformulierung

Wir betrachten das in Abb. 5.1 gezeigte Strömungsgebiet Ω . In diesem sind ein Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} und ein Druck p gesucht, welche den instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen genügen:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

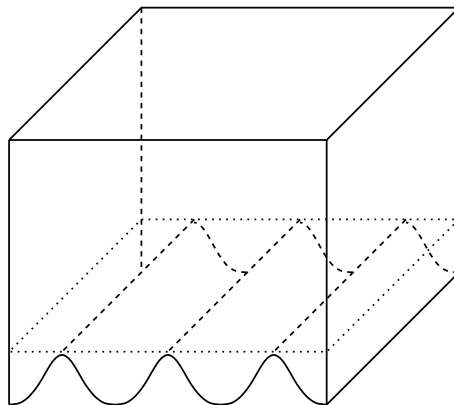


Abbildung 5.1: Das für die Simulation einer instationären Strömung über Ribletstrukturen verwendete Strömungsgebiet Ω

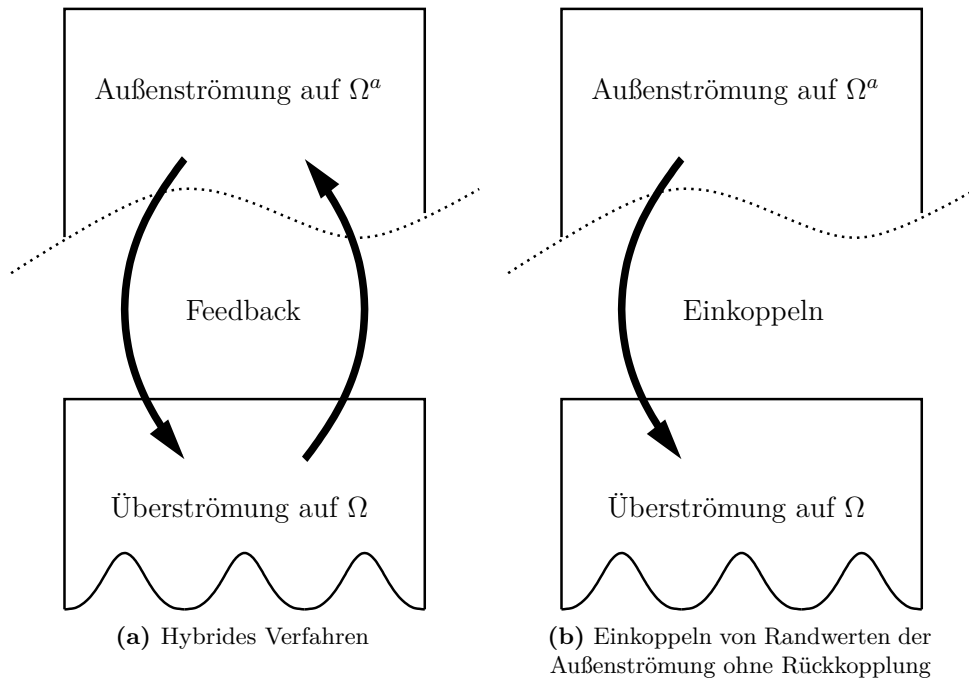


Abbildung 5.2: Schema zur Funktionsweise von hybriden Verfahren, sowie zum Einkoppeln von Randdaten in das Strömungsgebiet Ω

Um hieraus ein wohlgestelltes und berechenbares Problem zu erhalten, benötigen wir die Vorgabe sowohl von Anfangsdaten $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ und – wesentlich für die Aussagekraft des Modells – von geeigneten zeitabhängigen Randdaten

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{V}(t). \quad (5.2)$$

Es gibt mehrere Strategien, das Problem der Anfangs- und Randwertvorgabe zu lösen. So ist z. B. denkbar, Ω so groß zu wählen, dass die Randdaten stets durch eine Potentialströmung gegeben sind, welche analytisch berechenbar ist. Aufgrund der schlechten numerischen Berechenbarkeit wollen wir auf diesen Lösungsweg allerdings verzichten und mit Ω nur einen Ausschnitt der turbulenten Grenzschicht simulieren.

Eine Möglichkeit, hierbei geeignete Randdaten und somit eine Ankopplung von Ω an die restliche Überströmung zu erhalten, stellen *hybride Verfahren* dar (vgl. Abb. 5.2a): Die in Ω berechnete Strömung, welche die viskose Unterschicht und Teile des Bufferlayers zusammen mit den Ribletstrukturen gut auflöst, liefert ein „Feedback“ (z. B. durch Randdaten) für eine Strömung in einem Außengebiet Ω^a . Diese wiederum wird durch ein Verfahren berechnet, welches Turbulenzcharakteristika gut darstellen kann, und koppelt zur Strömung auf Ω zurück. Typischerweise löst man dabei beide Systeme gleichzeitig, um mit einer geeigneten Strategie zu ausgewählten Zeitpunkten das jeweilige Feedback

in die numerische Simulation einfließen zu lassen und so eine Kopplung zu erreichen (Richter 2010).

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wird allerdings auf eine volle Kopplung eines hybriden Verfahrens verzichtet und das in Abb. 5.2b gezeigte Prinzip angewandt. D. h. die unbekannt Start- und Randdaten für die Simulation auf Ω werden von einer eigenständigen Simulation von Ω^a abgegriffen, ohne dass eine Rückkopplung nach Ω^a erfolgt. Dies hat zwei entscheidende Vorteile: Die Berechnung von Ω^a kann komplett unabhängig von der eigentlichen Simulation erfolgen – somit kann auch auf beliebige, geeignete und bereits berechnete Simulationsdaten zurückgegriffen werden. Weiterhin entfällt der arbeitsintensive Schritt, zwei unterschiedliche Verfahren voll zu koppeln.

Es ist allerdings zu beachten, dass der wesentliche Effekt, den man beobachten will, die Einflussnahme der Ribletstruktur auf die Überströmung ist. Genau diese Feedback-Richtung schaltet man aber in dem in Abb. 5.2b gezeigten Verfahren aus! Es wird deshalb notwendig sein, die Rückkopplung der Ribletstrukturen auf die Überströmung in erster Ordnung zu korrigieren.

Simulationsdaten für Ω^a

Für die Rand- und Startwertvorgabe werden Simulationsdaten aus einer direkten numerischen Simulation einer vollturbulenten Kanalströmung verwendet. Die Daten wurden im Rahmen der Diplomarbeit von Stroh (2010) am CENTER OF SMART INTERFACES der Technischen Universität Darmstadt mit einem *Finite-Differenzen*-Verfahren berechnet und dem Autor freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

Aus den zeitabhängigen Simulationsdaten des gesamten Strömungsgebietes Ω^a des Kanals, wird der in Abb. 5.3 skizzierte Bereich ausgeschnitten und dieser für die Rand- und Startwerte der Simulation auf Ω verwendet. Unbekannte zeitliche und räumliche Zwischenwerte werden dabei linear interpoliert.

Korrektur des Fehlers der fehlenden Rückkopplung

In Abschnitt 3.6 ist im Rahmen des stationären Modells der Einfluss von Ribletstrukturen auf eine Überströmung vorgestellt worden: Das Strömungsprofil der Überströmung wird durch das Anbringen von Mikrostrukturen nach oben verschoben und lokal gestört. Da, wie bereits angesprochen, dieser Einfluss der Ribletstrukturen auf die (durch die Simulation von Ω^a gegebenen) Randdaten allerdings nicht beachtet wird, müssen die Randdaten entsprechend korrigiert werden.

Aus dem stationären Fall ist bekannt, dass das entsprechende, ungestörte Couetteprofil bei einer Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ unterhalb der Strukturhöhe beginnt. Die korrekte Eindringtiefe für die turbulente Situation kann allerdings nicht direkt ermittelt werden. Wir wissen, dass zum einen das turbulent gemittelte Strömungsprofil in Wandnähe ungefähr

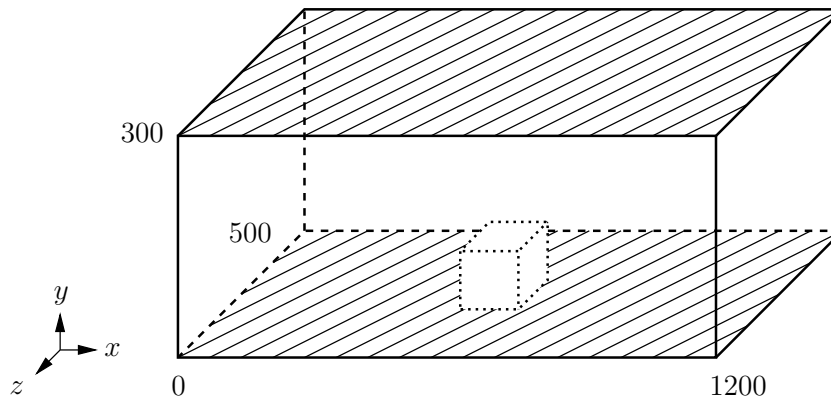


Abbildung 5.3: Das am CENTER OF SMART INTERFACES in Darmstadt simulierte Gebiet Ω^a einer turbulenten Kanalströmung: Auf den gestrichelten Rändern sind Nullrandwerte vorgegeben, wohingegen die anderen Ränder durch periodische Randdaten fortgesetzt werden. Ω^a hat eine Abmessung der Grundseite von 1200×500 und eine halbe Höhe von 150 (vgl. Stroh 2010). Aus den Simulationsdaten wird der eingezeichnete Quader mit den Maßen $60 \times 60 \times 60$ ausgeschnitten und dieser für die Start- und Randwerte von Ω benutzt.

bis zur Strukturhöhe linear mit der Höhe anwächst ($\bar{v}^+ = y^+$, vgl. Abb. 2.3) und zum anderen die Eindringtiefe im bekannten laminaren Fall nur schwach von den Parametern der Überströmung abhängt und somit im Wesentlichen eine Funktion der Geometrie ist (vgl. Abschnitt 3.6.2). Aus diesen beiden Gründen werden die eingebrachten Mikrostrukturen um die aus dem laminaren Fall bekannte Eindringtiefe korrigiert (vgl. Abb. 5.4).

Das prinzipielle Problem nicht vollständig bekannter Rand- und Startwerte

Das bisher formulierte Vorgehen, Ribletstrukturen um die Eindringtiefe korrigiert in Ω einzubauen, führt auf das prinzipielle Problem, dass – da die Mikrostrukturen nicht in Ω^a vorhanden sind – Teile der von Ω^a abgegriffenen Rand- und Anfangsdaten unverträglich mit der Mikrostruktur (oder schlicht unbekannt) sind.

Wir werden deshalb die Randdaten in dem (aus dem laminaren Fall bekannten) Bereich, in dem Ribletstrukturen lokal die Strömung beeinflussen, frei lassen, d. h. die bereits in Abschnitt 4.2.1 vorgestellte natürliche Randbedingung verwenden. Dies führt zusammenfassend zu dem in Abb. 5.4 gezeigten Strömungsgebiet Ω mit gemischten dirichletschen und natürlichen Randdaten.

Die Startwerte der Simulation werden im unbekanntem Bereich mit 0 fortgesetzt und anschließend die Nullrandwerte auf Γ (durch Setzen der Geschwindigkeit auf 0) sichergestellt. Die Motivation ist, dass im Laufe der Simulation der Fehler der Startwerte an

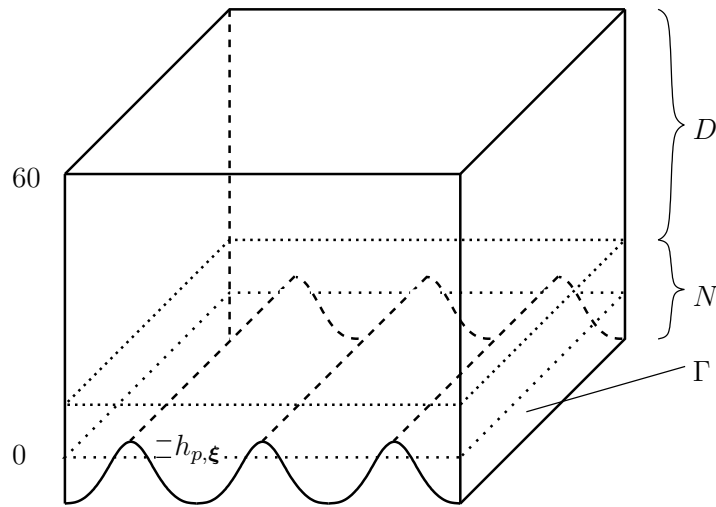


Abbildung 5.4: Der Rand $\partial\Omega$ wird unterteilt in die periodische Rauheit Γ , die um die Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ korrigiert in Ω eingebaut wird und auf der Nullrandwerte für \mathbf{v} vorgegeben sind, dem Mantelstreifen N rings um die Rauheit mit natürlicher Randbedingung und dem restlichen Bereich D , auf dem die von Ω^a gewonnenen Dirichletdaten aufgeprägt werden.

Einfluss verliert („Fehlerdämpfung“) und sich die simulierte Strömung einer physikalisch korrekten Überströmung annähert.

5.2 Direkte numerische Simulation

Die numerische Simulation des vorgestellten instationären Modells (5.1) auf dem Strömungsgebiet Ω (vgl. Abb. 5.4) macht aufgrund der Instationarität die Diskussion einiger weiterer numerischer Aspekte notwendig. Dies soll zusammen mit einer kritischen Betrachtung der Vorgehensweise in diesem Abschnitt geschehen.

5.2.1 Variationelle Formulierung

Für die Formulierung eines Einschrittverfahrens zur Lösung des instationären Modells sei das System

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v} = \mathbf{V} & \text{auf } D \times (0, T), \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 & \text{für } t = 0 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

betrachtet.

Bemerkung: Im Fall voller Dirichletdaten, d. h. $D = \partial\Omega$, muss offensichtlich eine *Kompatibilitätsbedingung* gelten:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (5.4)$$

Im Fall gemischter Randdaten erlaubt die natürliche Randbedingung analog:

$$0 = \int_D \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_N \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Testet man nun (5.3) mit $\Phi = (\boldsymbol{\varphi}, \xi) \in \mathcal{D}([0, T], \Omega) = C_0^\infty([0, T], C_0^\infty(\Omega)^4)$ und integriert wie im stationären Fall partiell, erhält man die variationelle Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial_t \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) \, dt \\ - \int_0^T (p, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T (\nabla \cdot \mathbf{v}, \xi) \, dt = 0. \end{aligned}$$

Hiermit ist es möglich, eine variationelle Formulierung (vgl. Temam 2001) aufzustellen:

Definition 5.1 (Instationäres Modell, variationelle Formulierung): Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} \in L^2([0, T], H^1(\Omega)^3),$$

dessen zeitlich distributionelle Ableitung $\partial_t \mathbf{v}$ im Raum $L^2([0, T], H^{-1}(\Omega)^3)$ liegt, zusammen mit einem Druck

$$p \in L^2([0, T], L^2(\Omega)),$$

so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial_t \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) \, dt \\ - \int_0^T (p, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, dt + \int_0^T (\nabla \cdot \mathbf{v}, \xi) \, dt = 0 \\ \forall \Phi = (\boldsymbol{\varphi}, \xi) \in \mathcal{D}([0, T], \Omega). \quad (5.5) \end{aligned}$$

Die Anfangs- und Randbedingungen kodiert man wie im stationären Fall über den Ansatzraum. D. h. wir fordern von \mathbf{v} zusätzlich

$$\mathbf{v}|_D = \mathbf{V} \quad \text{in } L^2([0, T], H^{1/2}(D)^3), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0. \quad (5.7)$$

Bemerkung: Die Bedingung (5.7) ist wohlgestellt, da durch

$$\partial_t \mathbf{v} \in L^2 \left([0, T], H^{-1}(\Omega)^3 \right)$$

die Geschwindigkeit \mathbf{v} einen stetigen Repräsentanten in $L^2 \left([0, T], L^2(\Omega)^3 \right)$ besitzt und somit Punktwerte in der Zeit wohldefiniert sind (vgl. Temam 2001).

5.2.2 Formulierung als Einschrittverfahren

Die variationelle Formulierung ermöglicht es nun prinzipiell, einen *Galerkin-Ansatz* durch gleichzeitiges Diskretisieren der Ansatzräume in Zeit und Ort aufzustellen. Wir möchten an dieser Stelle allerdings den traditionellen Weg beschreiten und direkt ein Einschrittverfahren formulieren.

Die variationelle Formulierung soll nach der *Rothe-Methode* diskretisiert werden, d. h. man überführt das parabolische System partieller Differentialgleichungen (5.5) durch Zeitdiskretisierung (mit einer geeigneten Einschrittmethode) auf das bereits bekannte stationäre System partieller Differentialgleichungen (mit modifizierter rechter Seite).

Sei dazu

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$$

eine Zerlegung des Zeitintervalls $(0, T)$ in diskrete Zeitpunkte. Wir setzen $k_m = t_m - t_{m-1}$. Unter der Hypothek etwas höherer Regularität in der Zeit (so dass zeitliche Punktwerte im folgenden Sinne existieren) gilt die Entwicklung:

$$(\mathbf{v}(\cdot, t_m), \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{v}(\cdot, t_{m-1}), \boldsymbol{\varphi}) + k_m (\partial_t \mathbf{v}(\cdot, t_{m-1}), \boldsymbol{\varphi}) + \mathcal{O}(k_m^2) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^3.$$

Mit ihrer Hilfe berechnet man nun Näherungen

$$\mathbf{v}^m \approx \mathbf{v}(\cdot, t_m), \quad p^m \approx p(\cdot, t_m)$$

ausgehend von $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}(\cdot, t_0)$, $p^0 = p(\cdot, t_0)$ durch:

$$\begin{aligned} k_m^{-1} \left\{ (\mathbf{v}^m, \boldsymbol{\varphi}) - (\mathbf{v}^{m-1}, \boldsymbol{\varphi}) \right\} + \theta \left\{ (\nabla \mathbf{v}^m, \nabla \boldsymbol{\varphi}) + ((\mathbf{v}^m \cdot \nabla) \mathbf{v}^m, \boldsymbol{\varphi}) \right\} \\ + (1 - \theta) \left\{ (\nabla \mathbf{v}^{m-1}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) + ((\mathbf{v}^{m-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{m-1}, \boldsymbol{\varphi}) \right\} \\ - \theta_p (p^m, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) - (1 - \theta_p) (p^{m-1}, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) \\ + \theta_i (\nabla \cdot \mathbf{v}^m, \boldsymbol{\xi}) + (1 - \theta_i) (\nabla \cdot \mathbf{v}^{m-1}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \end{aligned} \quad \forall (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) \in C_0^\infty(\Omega)^4, \quad (5.8)$$

mit geeignet zu wählenden $\theta_v, \theta_p, \theta_i \in [0, 1]$.

Diese Wahl der Diskretisierung ist als *Einschritt- θ -Verfahren* bekannt. Aus der klassischen Theorie der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (in der üblicherweise $\theta_v = \theta_p = \theta_i = \theta$ gesetzt wird) weiß man, dass das Verfahren für $\theta = 1/2$ von zweiter Ordnung in der Zeit ist.

Die variationelle Formulierung approximiert den Druck in einem zeitlich um eine Ableitungsstufe weniger regulären Ansatzraum. Um diesem Umstand gerecht zu werden und um zeitliche Oszillation aufgrund der Approximation in falschen Ansatzräumen zu vermeiden, wählen wir im Zeitschrittverfahren (5.8) den Beitrag des Drucks und der Inkompressibilität voll implizit, d. h. $\theta_p = \theta_i = 1$ und $\theta_v = 1/2$:

$$\begin{aligned} k_m^{-1} \{(\mathbf{v}^m, \varphi) - (\mathbf{v}^{m-1}, \varphi)\} + \frac{1}{2} \{(\nabla \mathbf{v}^m, \nabla \varphi) + ((\mathbf{v}^m \cdot \nabla) \mathbf{v}^m, \varphi)\} \\ + \frac{1}{2} \{(\nabla \mathbf{v}^{m-1}, \nabla \varphi) + ((\mathbf{v}^{m-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{m-1}, \varphi)\} \\ - (p^m, \nabla \cdot \varphi) + (\nabla \cdot \mathbf{v}^m, \xi) = 0 \quad \forall (\varphi, \xi) \in C_0^\infty(\Omega)^4. \end{aligned}$$

Diese Wahl hat weiterhin den Vorteil, dass die Näherungslösung \mathbf{v}^m zu jedem berechneten Zeitpunkt – ebenso wie die zu approximierende Lösung \mathbf{v} der Differentialgleichung – voll inkompressibel ist. Man erhält mit $\theta_p = \theta_i$ wieder das aus dem Stationären bekannte Bild, dass p (in jedem Zeitschritt) einen *Lagrange-Multiplikator* für die *algebraische Nebenbedingung* $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ darstellt.

Das vorgestellte Schema ist allgemein als *Crank-Nicolson-Verfahren* bekannt. Es ist, wie angesprochen, von zweiter Ordnung in der Zeitapproximation. Des Weiteren ist es *A-stabil* und weist eine sehr geringe *Dissipation* auf. Der große Defekt des Crank-Nicolson-Verfahrens liegt in der fehlenden *starken A-Stabilität*, d. h. es ist sehr anfällig gegenüber „hochfrequenten“ Störungen, die nicht gedämpft werden (vgl. Rannacher 2006).

Bemerkung: Dies wird anschaulich klar, wenn man das Crank-Nicolson-Verfahren auf die skalare Testgleichung $y'(t) = qy(t)$, $t \geq 0$ mit $q \in \mathbb{C}$ anwendet:

$$y^m = R(qk_m)y^{m-1}$$

mit dem Verstärkungsfaktor $R(\lambda) = \frac{2+\lambda}{2-\lambda}$. Es folgt

$$\limsup_{\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow -\infty} |R(\lambda)| = 1 \not< 1,$$

was die angesprochene Instabilität erklärt, da ein Verstärkungsfaktor von 1 numerische Fehler nicht ausdämpfen kann.

Eine Variante, die diesen Defekt des Crank-Nicolson-Verfahrens behebt und deshalb

hier zur Anwendung kommen soll, ist das *Teilschritt- θ -Verfahren* („*Fractional-step- θ -scheme*“). Hierbei wird ein Zeitschritt in drei Teilschritte unterteilt,

$$t_{m-1} \longrightarrow t_{m-1+\theta} \longrightarrow t_{m-\theta} \longrightarrow t_m,$$

und für jeden Teilschritt ein Einschritt- θ -Schema mit jeweils einer speziellen Wahl von θ_v gelöst (vgl. Rannacher 2006). Zur besseren Übersicht sei das Schema in starker Form angegeben:

$$\begin{aligned}
 (1.) \quad & \begin{cases} \left[1 + \alpha \theta k^m (-\Delta + \mathbf{v}^{m-1+\theta} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}^{m-1+\theta} + \theta k^m \nabla p^{m-1+\theta} = \\ \left[1 - (1 - \alpha) \theta k^m (-\Delta + \mathbf{v}^{m-1} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}^{m-1}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{m-1+\theta} = 0, \end{cases} \\
 (2.) \quad & \begin{cases} \left[1 + (1 - \alpha)(1 - 2\theta) k^m (-\Delta + \mathbf{v}^{m-\theta} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}^{m-\theta} + (1 - 2\theta) k^m \nabla p^{m-\theta} = \\ \left[1 - (\alpha)(1 - 2\theta) k^m (-\Delta + \mathbf{v}^{m-1+\theta} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}^{m-1+\theta}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{m-\theta} = 0, \end{cases} \\
 (3.) \quad & \begin{cases} \left[1 + \alpha \theta k^m (-\Delta + \mathbf{v}^m \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}^m + \theta k^m \nabla p^m = \\ \left[1 - (1 - \alpha) \theta k^m (-\Delta + \mathbf{v}^{m-\theta} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}^{m-\theta}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^m = 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

mit der speziellen Wahl $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$ und $\alpha = (1 - 2\theta)/(1 - \theta)$.

Dieses Verfahren ist ebenfalls von zweiter Ordnung und weist eine geringe Dissipation auf. Für die vorgestellte Wahl von θ und α ist das Verfahren im Gegensatz zum Crank-Nicolson-Verfahren zusätzlich stark A-stabil. Hinsichtlich der Rechengenauigkeit ist ein Teilschritt- θ -Zyklus mit 3 Crank-Nicolson-Schritten von einem Drittel der Schrittweite vergleichbar (Rannacher 2006).

Die in jedem Teilschritt von (5.9) zu lösenden Probleme werden ausgehend von der variationellen Formulierung (5.8) des allgemeinen Einschritt- θ -Verfahrens analog zum stationären Modell diskretisiert und gelöst (vgl. Kapitel 3). Dabei wird für jeden Zeitschritt stets das gleiche Ortsgitter verwendet.

5.2.3 Berechnung des Strömungswiderstands

Der Strömungswiderstand wird über die in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Methode des Überführens des Randintegrals auf ein Volumenintegral berechnet. Partielles Integrieren des Residuums $(\partial_t \mathbf{v}, \tilde{\varphi}) + a(u, \tilde{\Phi})$ mit einer hinreichend regulären Lösung $u = (\mathbf{v}, p)$

liefert:

$$\begin{aligned}
 & (\partial_t \mathbf{v}, \tilde{\varphi}) + a(u, \tilde{\Phi}) \\
 &= (\partial_t \mathbf{v}, \tilde{\varphi}) + ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla p, \tilde{\varphi}) + \int_{\partial\Omega} (\partial_n \mathbf{v} - p \mathbf{n}) \cdot \tilde{\varphi} \, d\sigma \\
 &= \int_{\partial\Omega} (\partial_n \mathbf{v} - p \mathbf{n}) \cdot \tilde{\varphi} \, d\sigma = \mathcal{F}_i^m,
 \end{aligned}$$

mit der in (3.19) gegebenen speziellen Wahl einer Testfunktion $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}, 0)$. D. h. zur näherungsweise Berechnung des Strömungswiderstands \mathcal{F}_i^m benutzen wir

$$\mathcal{F}_{h,i}^m = \left(\frac{\mathbf{v}^m - \mathbf{v}^{m-1}}{k^m}, \tilde{\varphi}_{h,i} \right) + a(u_h^m, \tilde{\Phi}_{h,i}). \quad (5.10)$$

5.2.4 Kritische Betrachtung

Mit dem vorgestellten instationären Modell soll der Einfluss von Ribletstrukturen auf eine turbulente Überströmung simuliert werden. Neben der bereits in der Modellformulierung angesprochenen fehlenden Rückkopplung an die Außenströmung sind aus numerischer Sicht noch einige weitere Aspekte kritisch zu betrachten.

Der in Kapitel 3 vorgestellte Finite-Elemente-Ansatz mit gleichem Ansatzraum für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck macht eine Stabilisierung notwendig. Durch die verwendete, nicht konforme *Lokale Projektionsstabilisierung* (LPS) erhält die zu lösende Gleichung aber einen zusätzlichen diffusiven Term (3.12), der zu einem wesentlichen Verlust der Turbulenzcharakteristika der Strömung führt. Zum einen ist zu erwarten, dass die durch die Anfangswert- und Randdaten aufgeprägte Turbulenz stark geglättet wird, zum anderen ist die vorgestellte Methode von sich aus nur begrenzt in der Lage Turbulenz zu erzeugen. Auftretende Turbulenz ist in der Regel mit einer nicht berechenbaren notwendigen Feinheit der Orts- und Zeitauflösung, sowie sehr langsamer Konvergenzraten des Newton-Verfahrens und des linearen Löser verbunden. Abgesehen hiervon ist die vorgestellte Finite-Elemente-Methode nicht darauf ausgelegt, typische Erhaltungsgrößen (turbulenter) Strömungen zeitlich exakt wiederzugeben, wie es z. B. bei Finite-Volumen-Methoden der Fall ist.

Bei der numerischen Simulation muss also zunächst einmal die Frage beantwortet werden, ob der erhaltene Datensatz eines Ausschnitts einer turbulenten Kanalströmung bei vollen Dirichletdaten durch das verwendete Verfahren reproduziert werden kann. Dies sollte gleichzeitig die Frage beantworten, wie verträglich die aufgeprägten Simulationsdaten zum vorgestellten Modell sind. So ist z. B. die Divergenzfreiheit und damit die Erfüllung der Kompatibilitätsbedingung (5.4), sowie die Frage nach der richtigen Viskosität kritisch zu hinterfragen.

Problematisch sind weiterhin die verwendeten natürlichen Randdaten. Aufgrund des „laminarisierenden“ Verhaltens der Stabilisierung sind die aus einer Turbulenzsimulation

abgegriffenen Randdaten die einzige Möglichkeit gewisse Turbulenzcharakteristika (wie z. B. Wirbel) über einen längeren Zeitraum in der Simulation von Ω zu halten. Durch das Freilassen eines signifikanten Teils des Rands mit der natürlichen Randbedingung läuft man Gefahr in diesem Bereich vom turbulenten Strömungscharakter zu weit weg zu einem laminaren Charakter der Strömung zu geraten. Dies ist insbesondere deshalb kritisch, weil wir genau in diesem Bereich an einer Berechnung des Strömungswiderstands der periodischen Oberflächenrauheit interessiert sind.

5.3 Numerische Ergebnisse

An dieser Stelle sei zunächst der angesprochene Test der Verträglichkeit des Verfahrens mit dem erhaltenen Datensatz der Kanalströmung, sowie eine Abschätzung der richtigen Wahl der Zeitschrittweite vorgestellt. Im Rahmen der anschließend durchgeführten Simulationsreihe wird der Fehlereinfluss der natürlichen Randdaten und der Zeitverlauf des Strömungswiderstands diskutiert.

5.3.1 Test zur Verträglichkeit der Simulationsdaten

Betrachtet sei der Quader $\Omega = (0, 60)^3$, bei dem auf dem gesamten Rand $\partial\Omega$ die erhaltenen Simulationsdaten in Form von Dirichletdaten aufgeprägt seien. Das numerische Verfahren sollte in der Lage sein, die zeitliche Entwicklung der Simulationsdaten in Ω zu reproduzieren.

Ein zeitliches Auseinanderlaufen wäre ein Hinweis darauf, dass entweder die Kompatibilitätsbedingung (5.4) und damit die Inkompressibilität nicht erfüllt ist, oder aber die Daten nicht in den in Abschnitt (2.2.2) definierten viskosen Wandeinheiten vorliegen – d. h. im Wesentlichen, dass die Viskosität des instationären Modells und die des Datensatzes unterschiedlich sind. Weiterhin besteht die Möglichkeit, dass durch die „laminarisierende“ Wirkung der Stabilisierung die turbulenten Strömungsdaten zu unverträglich mit dem Verfahren sind.

Insbesondere die Frage nach der Inkompressibilität ist nicht von der Hand zu weisen, da zum einen die Simulationsdaten aus einem völlig anderen Verfahren – mit im Vergleich zum Teilschritt- θ -Verfahren unterschiedlicher Implementierung der Inkompressibilität – stammen, und zum anderen die Daten aufgrund unterschiedlicher Diskretisierung räumlich und zeitlich linear interpoliert werden müssen.

Um eine verwertbare Asymptotik zu erhalten, werden die reskalierten Navier-Stokes-Gleichungen (5.1) um den Viskositätsparameter ν erweitert (mit $\nu = 1$ erhält man die bisher betrachtete Form der Gleichungen):

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Diese werden nun auf einem relativ groben Ortsgitter von rund 32 000 Zellen mit einer Zeitschrittweite von $k = 0.03$ im Zeitintervall $[1, 4]$ mit dem angesprochenen numerischen Verfahren simuliert. Hierbei wird die Viskosität in einer Reihe

$$\nu = 6, 3, 1.5, 1$$

gegen den reskalierten Fall $\nu = 1$ geschickt und der zeitliche Verlauf der Differenz des errechneten Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} zu den erhaltenen Daten \mathbf{v}^{sim} betrachtet (Abb. 5.5). Es ist zu erkennen, dass die Differenz bei falscher Viskosität zeitlich zunimmt, wohingegen für $\nu = 1$ die anfängliche Differenz zeitlich konstant fortgesetzt wird. Dies ist insbesondere auch für die L^∞ -Norm der Fall, d. h. das numerische Verfahren ist – wenigstens für den kurzen, simulierten Ausschnitt – in der Lage, die punktweise Differenz zu den aufgeprägten Simulationsdaten stabil zu halten.

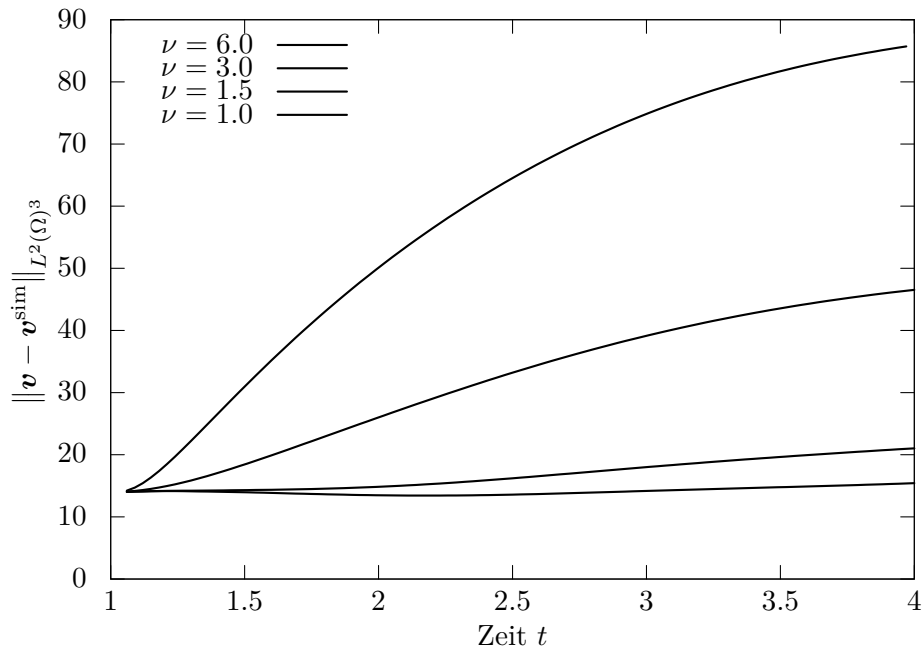
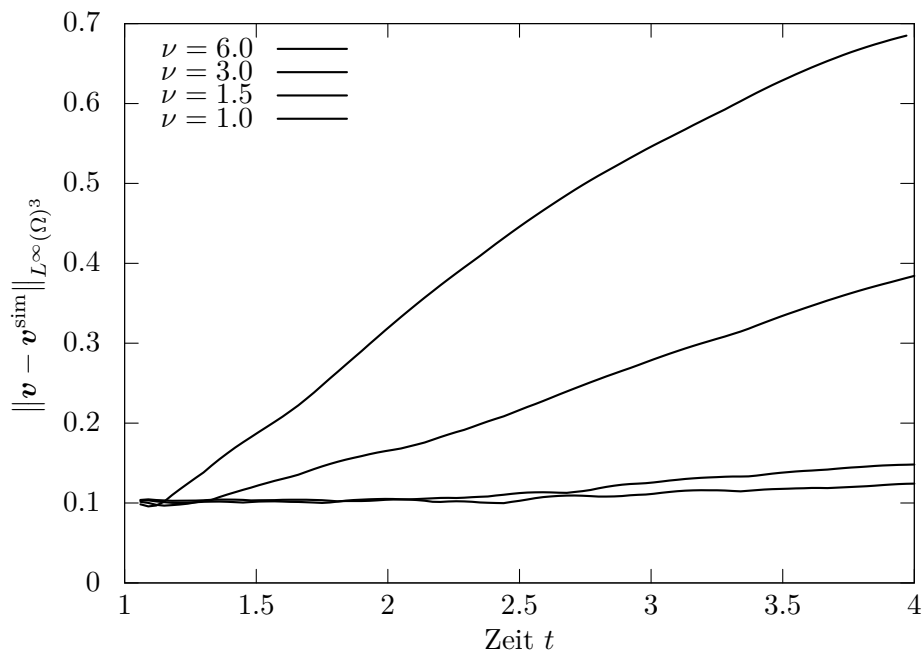
(a) Differenz in der $L^2(\Omega)^3$ -Norm(b) Differenz in der $L^\infty(\Omega)^3$ -Norm

Abbildung 5.5: Differenz des errechneten Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} auf dem Quader $\Omega = (0, 60)^3$ zu den erhaltenen Simulationsdaten \mathbf{v}^{sim} in verschiedenen Normen (bei vollen Dirichletdaten)

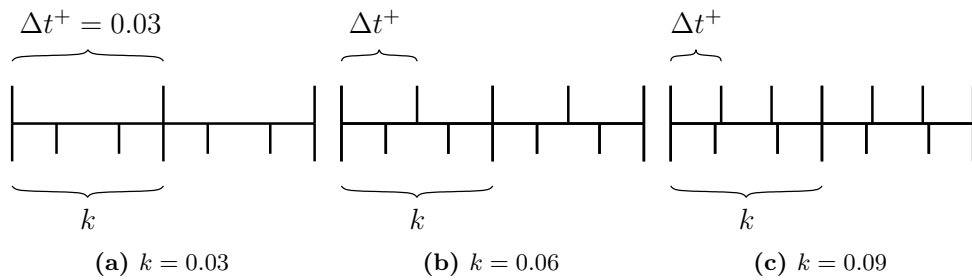


Abbildung 5.6: Zur Wahl der Zeitschrittweite: Die oberen Balken repräsentieren die Zeitpunkte, zu denen Simulationsdaten vorliegen, die unteren Balken stellen jeweils zwei Teilschritt- θ -Zyklen mit den entsprechenden Zwischenstellen dar.

5.3.2 Wahl der Zeitschrittweite

Ein weiterer kritischer Punkt ist die Wahl der Zeitschrittweite. Die Simulationsdaten wurden in Darmstadt bei einer Schrittweite von $\Delta t^+ = 0.03$ berechnet – es liegt also nahe, für das Teilschritt- θ -Verfahren ebenfalls eine Zeitschrittweite in dieser Größenordnung zu wählen.

Hierbei ist zwischen einer möglichst feinen Zeitschrittweite für eine gute zeitliche Approximation und einem möglichst geringem rechnerischen Aufwand durch eine möglichst große Zeitschrittweite abzuwägen. Eine Schrittweite weit unterhalb der Zeitauflösung der Simulationsdaten von $\Delta t^+ = 0.03$ ist dabei ebensowenig sinnvoll wie eine wesentlich größere Wahl, bei der die Randvorgabe der Simulationsdaten zeitlich nicht mehr voll aufgelöst werden kann. Aus diesem Grund bleibt im Wesentlichen eine Wahl von k zwischen 0.03 und 0.09 übrig.

In Abb. 5.6 sind die Zeitschemata für $k = 0.03$, 0.06 und 0.09 dargestellt. Zeitpunkte des Teilschritt- θ -Verfahrens, die nicht mit den Zeitpunkten der Simulationsdaten übereinstimmen, werden aus einer linearen Interpolation der beiden benachbarten Datenpunkte bestimmt. Man erkennt, dass für den Fall $k = 0.09$ die einzelnen vorhandenen Datenpunkte sehr nahe bei den Teilschritt- θ -Zwischenschritten liegen, während bei den anderen Werten für k im höheren Maße interpoliert werden muss. Aus einer heuristischen Sichtweise heraus, hat der Fall $k = 0.09$ demnach den Vorteil, dass für jeden Schritt ein Maximum an neuer „Information“ zur Verfügung steht.

Die in Abb. 5.7 zusammengefassten Ergebnisse für die unterschiedlichen Zeitschrittweiten stimmen sehr gut miteinander überein. Aus diesem Grund soll im Hinblick auf möglichst geringe rechnerische Kosten die Simulation mit einer Zeitschrittweite von $k = 0.09$ durchgeführt werden.

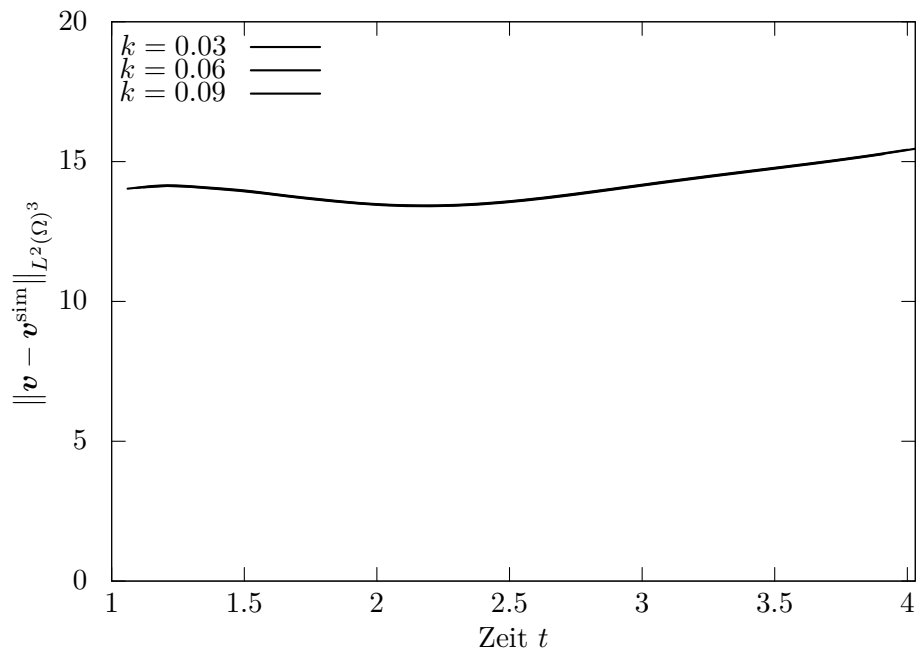
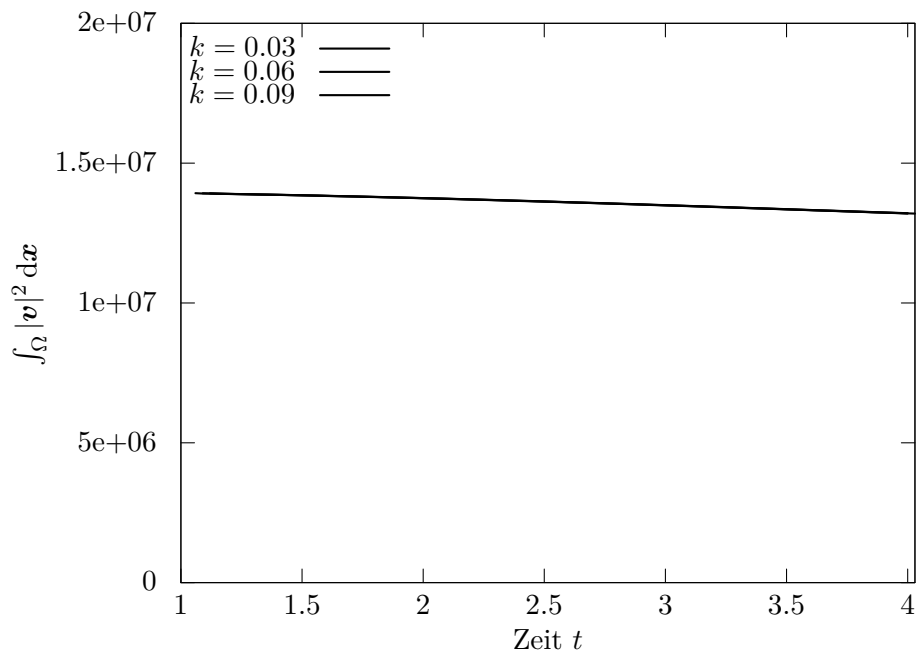
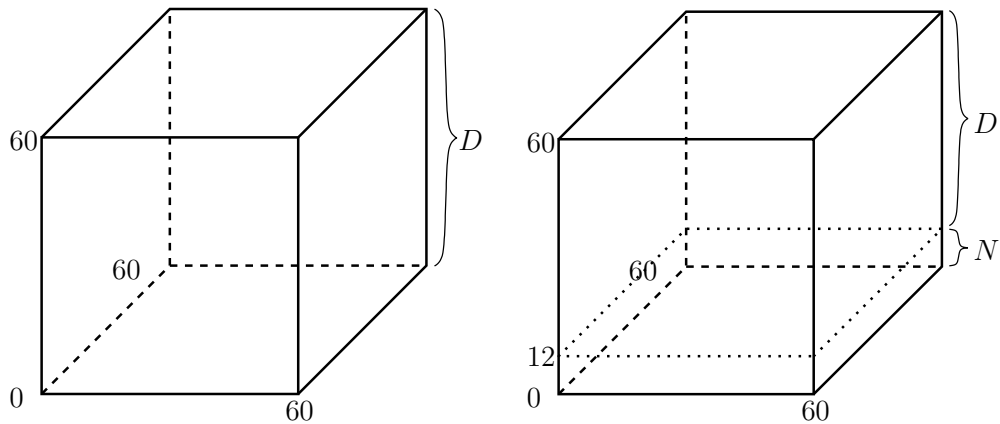
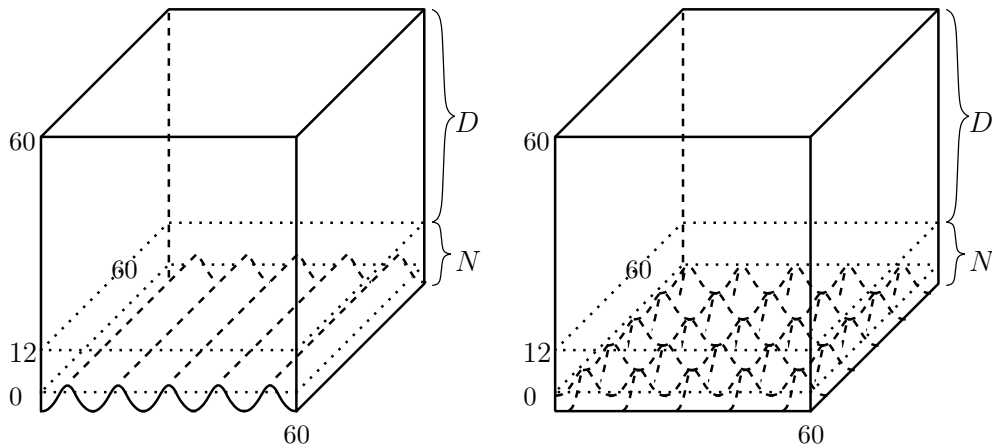
(a) Zeitverlauf der Differenz zu den Simulationsdaten in der $L^2(\Omega)^3$ -Norm(b) Zeitverlauf der Energie $\int_{\Omega} |v|^2 dx$

Abbildung 5.7: Ergebnis der Simulation einer Strömung v auf Ω für verschiedene Zeitschrittweiten $k = 0.03, 0.06$ und 0.09 : Es ergibt sich rechnerisch kein Unterschied in der zeitlichen Entwicklung der Differenz zu den vorgegebenen Simulationsdaten v^{sim} und im Energieverlauf.



(a) Glatter Rand mit vollen Dirichletdaten D

(b) Glatter Rand mit zusätzlichen natürlichen Randdaten auf einem Streifen der Höhe 12



(c) Ribletstruktur mit Strukturhöhe 6 und Breite 12

(d) Noppenstruktur mit Strukturhöhe 6 und Breite 12

Abbildung 5.8: Schema der vier simulierten Geometrien mit den entsprechenden Randtypen: Der Rauheit Γ mit Nullrandwerten, den natürlichen Randdaten N , sowie den aus der Strömungsvorgabe erhaltenen Dirichletdaten D .

5.3.3 Simulationsreihe

Es wird eine Reihe von Simulationen für die Riblet- und Noppengeometrie, sowie für den glatten Rand durchgeführt. Die Mikrostrukturen haben hierbei eine Höhe von $h^+ = 6$ und eine entsprechende Breite von 12. Sie werden – wie in der Modellformulierung erläutert – um die Eindringtiefe korrigiert in das Rechengebiet Ω eingebaut. Da die Hauptströmungsrichtung der Simulationsdaten in x -Richtung liegt, also um die auf die

Höhe $h^+ = 6$ reskalierten Eindringtiefen $h_{p,x}$ aus Tabelle 3.6:

$$\text{Ribletstruktur: } h_{p,x} = 1.6440, \quad \text{Noppenstruktur: } h_{p,x} = 2.7740.$$

Des Weiteren werden für den Rand $\partial\Omega$ bis zu einer Höhe von 12 natürliche Randdaten benutzt und oberhalb dieser der erhaltene Datensatz als Dirichletdaten aufgeprägt. Um eine Abschätzung des Fehlereinflusses der natürlichen Randdaten zu erhalten, sei weiterhin die Geometrie des glatten Rands doppelt berechnet – einmal mit vollen Dirichletdaten und einmal mit dem zusätzlichen Streifen von natürlichen Randdaten bis zu einer Höhe von 12. Eine genaue Übersicht der simulierten Geometrien ist in Abb. 5.8 zu finden.

Auf den vorgestellten Gebieten wird mit dem in Abschnitt 5.2.2 formulierten Teilschritt- θ -Verfahren eine instationäre Strömung für den Zeitraum $[0, 12]$ mit einer Schrittweite von $k = 0.09$ berechnet.

Fehlereinfluss der natürlichen Randdaten

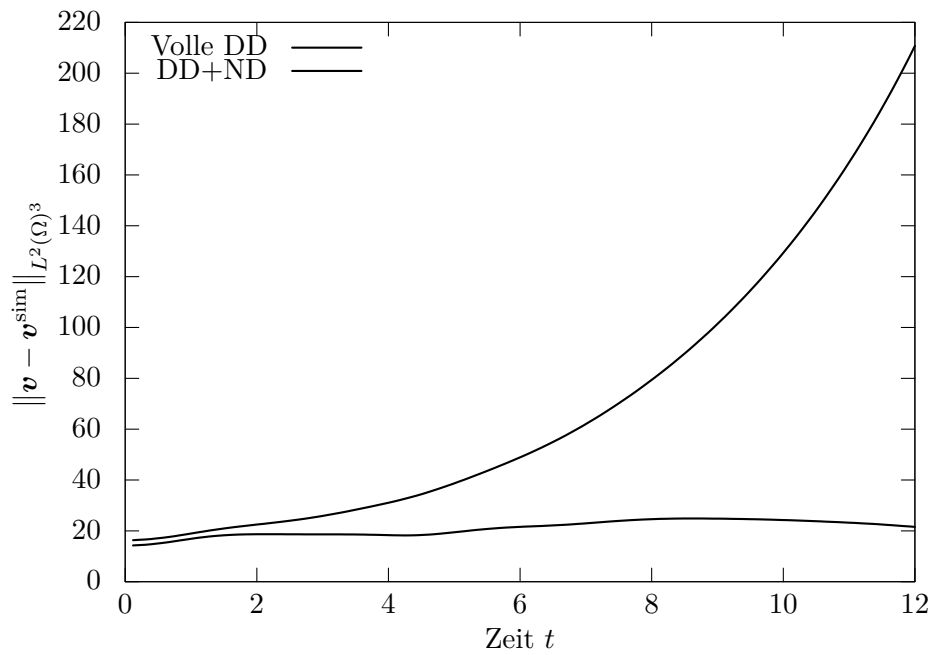
In Abb. 5.9 ist der zeitliche Verlauf der Differenz der errechneten Strömung \boldsymbol{v} zu den vorliegenden Simulationsdaten $\boldsymbol{v}^{\text{sim}}$ für die Geometrie des glatten Rands mit und ohne natürliche Randdaten N aufgetragen. Es ist gut zu erkennen, dass die Differenz bei der Simulation mit natürlichen Randdaten deutlich anwächst, wohingegen die anfängliche Differenz bei den vollen Dirichletdaten über den gesamten Zeitverlauf auf einem konstanten Niveau bleibt. Der Einfluss der natürlichen Randdaten auf den Strömungsverlauf ist demnach sehr deutlich ausgeprägt.

Bei der numerischen Simulation sind wir in letzter Konsequenz an der korrekten Wiedergabe von physikalischen Strömungscharakteristika interessiert. Aus diesem Grund betrachten wir als ein weiteres Maß für die Ähnlichkeit der beiden Simulationen noch den zeitlichen Verlauf des Strömungswiderstands in Hauptströmungsrichtung \mathcal{F}_x , sowie die *kinetische Energie* (vgl. Abb. 5.10)

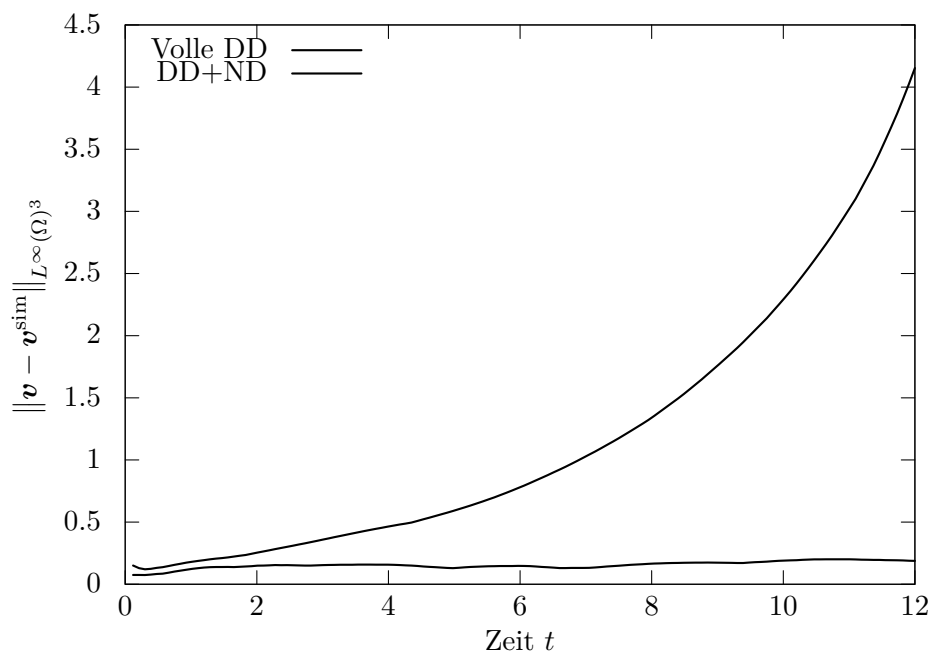
$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{x}.$$

Die zeitliche Entwicklung der Energien der beiden Fälle stimmt sehr gut miteinander überein. Gegen Ende des simulierten Zeitausschnitts liegt die Energie der Geometrie mit gemischten Randdaten leichtgradig über der mit vollen Dirichletdaten. Die Abweichung beträgt maximal etwa 4%. Der Zeitverlauf der Widerstandswerte zeigt deutlich größere Abweichungen von bis zu 2.8%. Es ist zu erkennen, dass die Zeitverläufe der beiden Geometrien ein leichtgradig unterschiedliches qualitatives Verhalten zeigen.

Dieses Ergebnis lässt die Schlussfolgerung zu, dass bei der Simulationsreihe der einzelnen Geometrien – aufgrund der Tatsache, dass stets im gleichen Maße natürliche Randdaten bis zu einer Höhe von 12 verwendet werden – die Strömungssituationen so weit ähnlich bleiben, dass die Ergebnisse miteinander verglichen werden können.

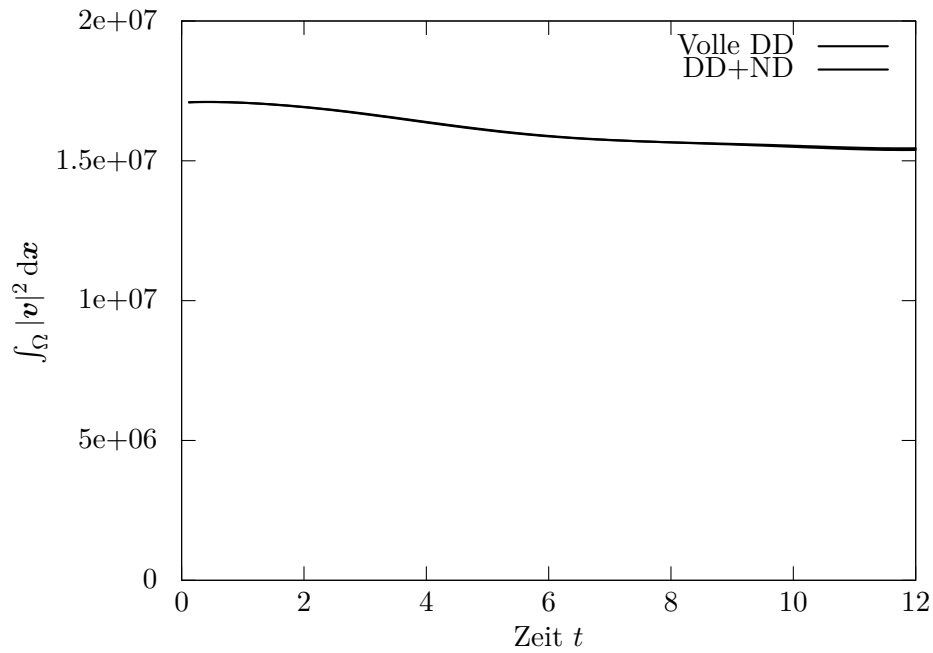


(a) Differenz in der $L^2(\Omega)^3$ -Norm

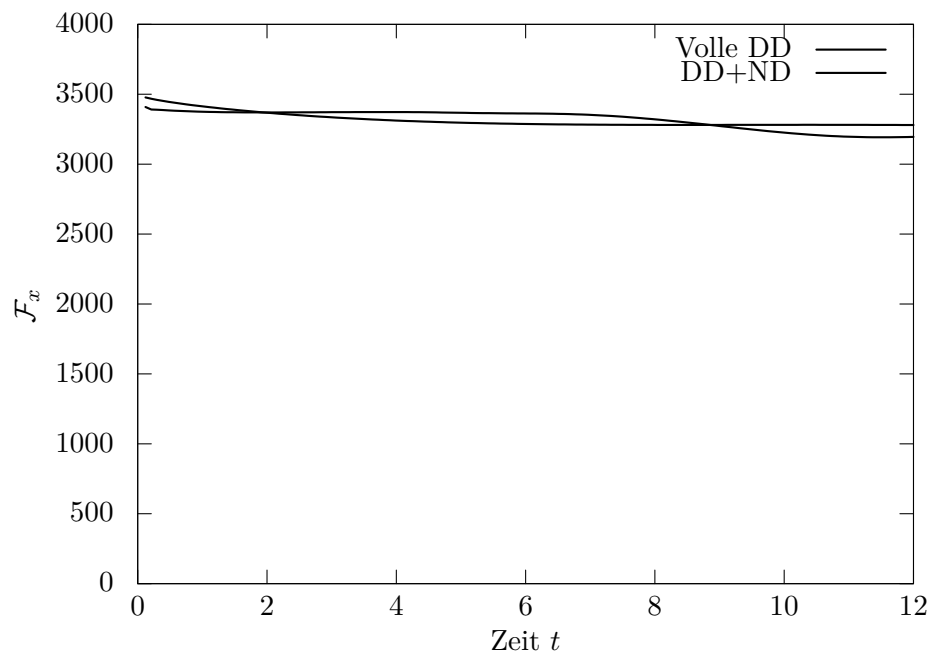


(b) Differenz in der $L^\infty(\Omega)^3$ -Norm

Abbildung 5.9: Differenz $(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{\text{sim}})$ des errechneten Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} zu den erhaltenen Simulationsdaten \mathbf{v}^{sim} auf der Geometrie mit glattem Rand bei vollen dirichletschen bzw. gemischten dirichletschen und natürlichen Randbedingungen



(a) Energieverlauf



(b) Zeitverlauf des Strömungswiderstands

Abbildung 5.10: Zeitverlauf der Energie und des Strömungswiderstands für die Geometrie mit glattem Rand bei vollen dirichletschen bzw. gemischten dirichletschen und natürlichen Randbedingungen

Zeitverlauf der Energie und des Strömungswiderstands der simulierten Geometrien

Betrachtet sei nun der Zeitverlauf der Energie und des Strömungswiderstands der simulierten Geometrien bei gemischten natürlichen und dirichletschen Randbedingungen (vgl. Abb. 5.11).

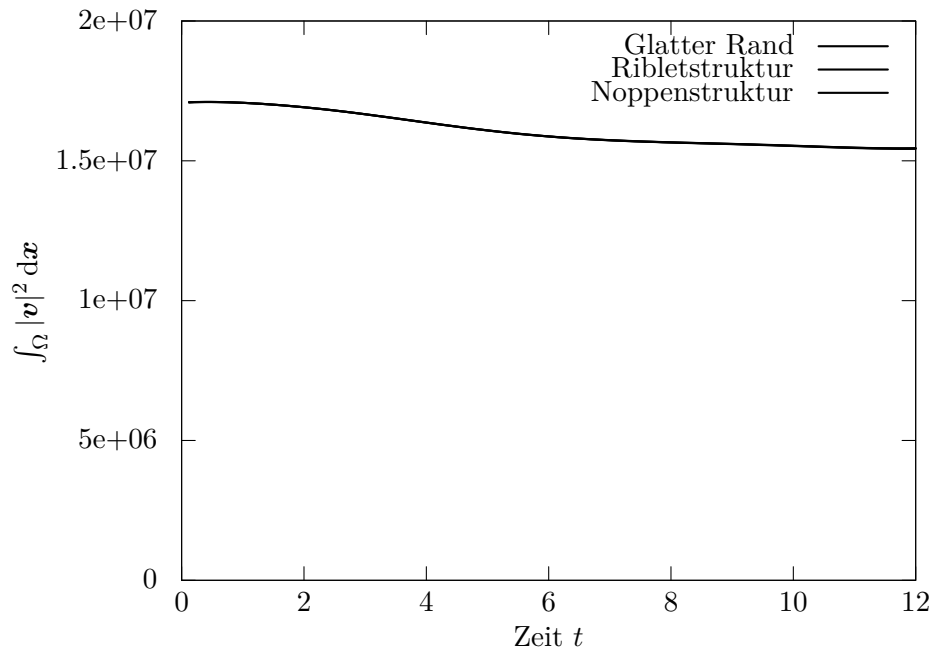
Die entsprechenden Verläufe der Energien stimmen für alle drei Geometrien sehr gut miteinander überein. In dem in Abb. 5.11a gezeigten Diagramm ist kein Unterschied zu erkennen.

Aus dem anfänglichen Zeitverlauf des Strömungswiderstands wird der Fehler in den Startwerten für die Riblet- und Noppenstruktur deutlich sichtbar: Am Anfang ist der Strömungswiderstand durch zu schnelle Fluidanteile in der Nähe der Strukturspitzen (die in die erhaltenen Simulationsdaten hineinreichen) deutlich erhöht. Dies klingt schnell ab, woraufhin nach kurzer Zeit der Strömungswiderstand der beiden Strukturen deutlich unter dem des glatten Rands fällt. Dies hat seine Ursache in der Fortsetzung der Simulationsdaten mit 0 für unbekannte Bereiche, so dass anfänglich die Fluidschichten um die Strukturen in Relation zur restlichen Überströmung eine zu geringe kinetische Energie aufweist und damit der Strömungswiderstand zu gering ist. Dies gleicht sich im Laufe der weiteren Rechnung aus. Insbesondere die Noppenstruktur nähert sich asymptotisch dem Widerstandsverlauf des glatten Rands an, was aus physikalischer Sicht zu erwarten ist.

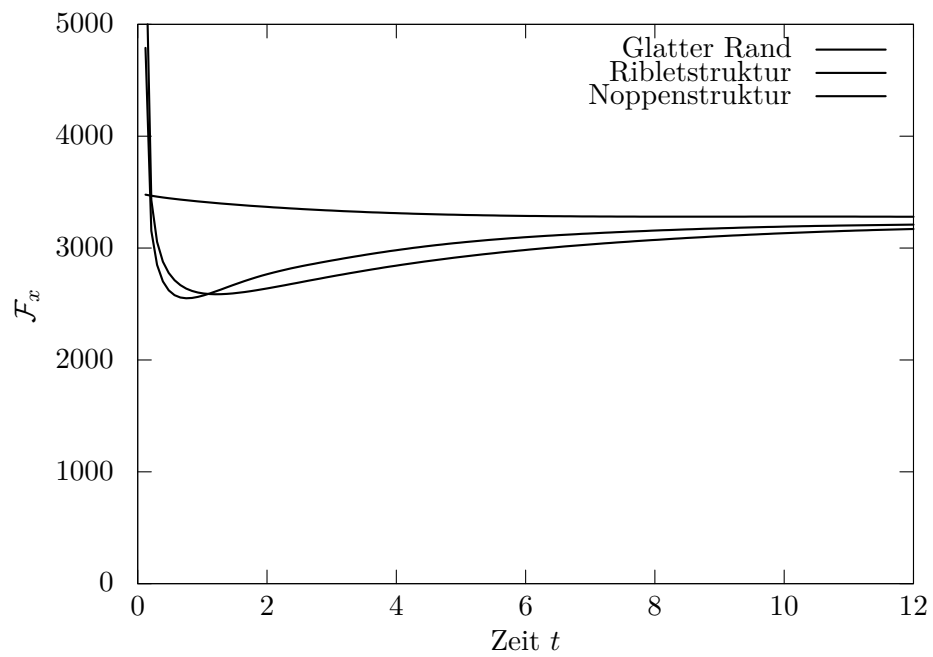
Der Widerstandswert der Ribletstrukturen liegt abgesehen von einem kurzen Zeitraum am Anfang konstant unter dem der Noppenstruktur. Die Ribletstruktur weist hierbei anfänglich eine Differenz von 4.6% zu dem Widerstandswert der Noppenstruktur auf, was sich allerdings zum Ende des simulierten Zeitintervalls auf etwa 1.5% verringert. Insgesamt ergibt sich für den simulierten Zeitraum ein mittlerer Strömungswiderstand von

$$\begin{aligned} \text{Ribletstruktur: } \int \mathcal{F}_x dt &= 2961, \\ \text{Noppenstruktur: } \int \mathcal{F}_x dt &= 3030. \end{aligned}$$

Eine Interpretation der Ergebnisse erfolgt im nächsten Abschnitt.



(a) Energieverlauf



(b) Zeitverlauf des Strömungswiderstands

Abbildung 5.11: Zeitverlauf der Energie und des Strömungswiderstands für die drei simulierten Geometrien (Ribletstruktur, Noppenstruktur und glatter Rand) mit einer Strukturhöhe $h^+ = 6$ und natürlichen Randbedingungen bis zu einer Höhe von 12

5.4 Interpretation

Aufgrund der in Abschnitt 5.2.4 angesprochenen Problematik der Stabilisierung und der notwendigen Verwendung der natürlichen Randbedingung ist eine physikalische Interpretation schwierig.

Der Zeitverlauf des Strömungswiderstands in Abb. 5.11b bestätigt dies. Die Werte für die beiden periodischen Geometrien nähern sich asymptotisch dem Wert des glatten Rands an. Bei einer Rechnung über den Endzeitpunkt $t = 12$ der Simulation hinaus wird die Differenz zum glatten Rand beliebig klein. D. h. das instationäre Modell liefert bei dieser Betrachtungsweise ebenfalls keine Änderung im Widerstandsverhalten der Geometrien.

Der Grund hierfür ist in der Tatsache zu suchen, dass das beschriebene numerische Verfahren eine „laminarisierende“ Projektion der turbulenten Strömungsvorgabe berechnet und durch die notwendige Verwendung der natürlichen Randbedingung der Strömungscharakter in der Nähe des unteren Rands zu laminar wird (vgl. Abschnitt 5.2.4). Aufgrund der Korrektur um die Eindringtiefe aus dem stationären, *laminaren* Fall wird so trotz der Instationarität das prinzipielle Ergebnis des stationären Falls reproduziert.

Eine weitere Problematik ergibt sich aus dem aus physikalischer Sicht relativ kurzen Zeitintervall $[0, 12]$. Die physikalische Zeitskala der Simulation, d. h. in diesem Fall das Verschwinden gewisser zeitlicher Korrelationen (vgl. Stroh 2010), liegt in der Größenordnung $\Delta t^+ = 3 - 6$. Das Zeitintervall von $\Delta t^+ = 6$ ist in dieser Hinsicht also gerade groß genug gewählt. Der Anfangsfehler ist allerdings bis zu einem Zeitpunkt $t^+ = 6 - 8$ signifikant und auch gegen Ende des Simulationszeitraums noch nicht asymptotisch verschwunden. D. h. streng genommen ist mit Ende der hier durchgeführten Simulation noch keine zeitlich stabile Überströmungssituation erreicht. Hierfür hätte das Strömungsgebiet für ein etwa doppelt so großen Zeitraum simuliert werden müssen.

Es bleibt die Fragestellung, wie in der sich einstellenden Asymptotik der Umstand zu interpretieren ist, dass die Ribletstruktur bei der zeitlichen Entwicklung des Strömungswiderstands stets unterhalb der Noppenstruktur liegt. Auf einen gegenüber der Noppenstruktur wenigstens temporären widerstandsoptimierenden Effekt kann nicht geschlossen werden. Dies liegt an der angesprochenen Problematik und der Tatsache, dass bei den beiden Strukturen geometriebedingt die Fläche der natürlichen Randdaten unterschiedlich groß ist.

Die Simulation bestätigt allerdings die Richtigkeit des aus dem stationären, laminaren Fall motivierten Vergleichs der Strömungssituation einer Geometrie mit der des glatten Rands bei einer Eindringtiefe $h_{p,\xi}$ unterhalb der Strukturspitze: Die zeitliche Entwicklung der Energie der einzelnen Geometrien und des glatten Rands, sowie die Asymptotik der Widerstandsentwicklung, sind sehr ähnlich.

6 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, ein mathematisches Modell für Ribletstrukturen aus analytischer und numerischer Sicht zu behandeln, sowie die erhaltenen Ergebnisse physikalisch zu interpretieren.

Hierzu wurde zunächst ein stationäres Modell einer periodischen Strömung über Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht numerisch direkt simuliert und eine Theorie des korrekten Vergleichs der erhaltenen Simulationsdaten mit Hilfe der *Eindringtiefe* $h_{p,\xi}$ aufgestellt. Es stellte sich heraus, dass mit Hilfe des stationären Modells der Effekt des *Umlenkens der Überströmung* in die Hauptströmungsrichtung plausibilisiert und in einem gewissen Rahmen durch die Differenz der Strömungswiderstände bzw. der Eindringtiefen quantitativ abgeschätzt werden kann.

Ein *direkter quantitativer Nachweis* eines widerstandsoptimierenden Effekts war mit dem stationären Modell einer periodischen Strömung über Ribletstrukturen in der viskosen Unterschicht nicht möglich.

Dem gegenüber erlaubte das stationäre Modell die Anwendung einer mathematischen *Homogenisierungstheorie*, mit Hilfe derer der Strömungswiderstand und die Eindringtiefe bei Ribletstrukturen mit einer sehr geringen Abweichung in der Größenordnung des angenommenen Simulationsfehlers effizient geschätzt werden konnte.

Abschließend wurde das stationäre Modell auf ein instationäres Modell zur Simulation einer zeitabhängigen Strömung über Ribletstrukturen im Bufferlayer erweitert. Hierbei war das prinzipielle Problem zu lösen, dass bei einer Simulation eines Ausschnitts des Bufferlayers geeignete zeitabhängige Randdaten für die physikalische Aussagekraft des Modells entscheidend sind. Hierfür kam eine an die Kopplung hybrider Verfahren angelehnte Methode zum Einsatz, bei der das Einkoppeln einer Außenströmung in das Simulationsgebiet beibehalten, allerdings die Rückkopplung ausgeschaltet und stattdessen eine (vom stationären Fall motivierte) Korrektur der aufgeprägten Rand- und Startwerte um die Eindringtiefe vorgenommen wurde.

Es stellte sich heraus, dass der limitierende Faktor hierbei beim verwendeten numerischen Verfahren liegt, welches durch die Verwendung der nicht konformen *lokalen Projektionsstabilisierung* (LPS) wesentliche Turbulenzcharakteristika der ursprünglich turbulenten Start- und Randwertvorgaben ausglättete. Aufgrund der daraus resultierenden Ähnlichkeit des Strömungscharakters mit dem stationären, laminaren Fall und der Verwendung (des aus dem laminaren Fall stammenden) Korrekturmechanismus über

die Eindringtiefe lieferte auch das instationäre Modell in der zeitlichen Asymptotik das gleiche Ergebnis für den Strömungswiderstand wie das stationäre Modell.

Um eine weiterführende physikalische Aussagekraft des instationären Modells zu ermöglichen, müssen an der numerischen Behandlung bzw. der prinzipiellen Modellformulierung zwei Dinge korrigiert werden:

- i.) Es ist zunächst notwendig, bei der Simulation den Q^2/Q^2 -Ansatzraum – der eine nicht konforme Stabilisierung bedingt – durch einen *inf-sup-stabilen* Ansatzraum – z. B. durch das *Taylor-Hood-Element* – zu ersetzen.
- ii.) Des Weiteren muss die Ankopplung an die Außenströmung z. B. durch die Verwendung eines vollen hybriden Verfahrens verbessert werden. Dies ist allerdings bei der vorgestellten Geometrie mit deutlich größeren numerischen Rechenaufwand aufgrund größerer Rechengebiete und prinzipieller Problematiken verbunden – z. B. unterschiedliche Feinheiten der Diskretisierung, oder unterschiedliche Rechengeschwindigkeiten verschiedener Verfahren pro Zeitschritt.

Eine alternative Herangehensweise zur Simulation von Grenzschichtströmungen über Ribletstrukturen ist aus Sicht der Homogenisierung möglich, indem auf das Auflösen der periodischen Oberflächenrauheiten verzichtet wird und das Überströmungsgebiet mit effektiven Randdaten anstelle der Mikrostruktur simuliert wird. Dies hat den sehr ansprechenden Vorteil, dass mit der numerischen Berechnung genau die turbulente Überströmung, die durch Ribletstrukturen beeinflusst werden soll, approximiert wird.

Dazu ist es aber zunächst notwendig die vorgestellte Homogenisierung auf den Fall einer instationären, turbulenten Strömung zu erweitern.

Während die Möglichkeit der Erweiterung auf den instationären Fall aus analytischer Sicht plausibilisiert werden kann, steht der rigorosen mathematischen Formulierung einer Homogenisierungstheorie von Strömungen mit turbulentem Charakter das prinzipielle Problem gegenüber, dass die Herleitung von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, die bei der Homogenisierung von zentraler Bedeutung ist, für turbulente Strömungssituationen nicht ohne Weiteres möglich ist.

A Periodische Funktionenräume

An dieser Stelle sei eine Charakterisierung des periodischen Funktionenraumes $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ über Spurwerte auf periodischen Randkomponenten (vgl. Prop. 1.1 in der Einleitung), sowie die Existenztheorie des (linearen) Stokes-Problems im Fall gemischter inhomogener und periodischer Randdaten vorgestellt.

A.1 Charakterisierung von periodischen Räumen

Sei Ω die in Abschnitt 1.2 definierte Einheitszelle (vgl. Abbildung 1.2a) und $\hat{\Omega}$ das Gebiet, welches durch Aneinanderreihen von Ω in der (x, z) -Ebene entsteht:

$$\hat{\Omega} := \left(\bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} \bar{\Omega} + (\varepsilon k, 0, \varepsilon l) \right)^\circ.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Charakterisierung des $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ über Spurwerte zu zeigen:

$$u \in H_{\text{per}}^1(\Omega) \iff u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \gamma_i u \cong \gamma_j u \text{ für gegenüberliegende} \quad (\text{A.1}) \\ \text{periodische Randkomponenten } \Gamma_i, \Gamma_j \text{ von } \Omega,$$

mit dem in Abschnitt 1.2 definierten Spuroperator γ . (Die periodischen Randkomponenten Γ_i sind gerade die Flächen, an denen Kopien von Ω zum großen Gebiet $\hat{\Omega}$ verklebt werden.)

Die Richtung „ \Rightarrow “ ist nach der Definition des $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ klar, für den Beweis der umgekehrten Aussage formulieren wir einige vorbereitende Lemmata:

Lemma A.1: Es ist $H_0^1(\Omega) \subset H_{\text{per}}^1(\Omega)$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass $C_0^\infty(\Omega) \subset C_{\text{per}}^\infty(\Omega)$ ist. \square

Lemma A.2: Es gilt die Charakterisierung $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma v = 0\}$.

Beweis: Vgl. (Alt 2006, Lemma A6.10). \square

Lemma A.3: Es sei $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ beliebig mit $\phi|_{\Gamma_i} \cong \phi|_{\Gamma_j}$ für ein Paar Γ_i, Γ_j gegenüberliegender periodischer Ränder von Ω und $\phi|_{\Gamma_k} = 0$ sonst.

Dann gibt es ein $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ mit $\gamma u = \phi$.

Beweis: O. E. ist $\Gamma_i = \Gamma_1$. Dann gibt es für $\delta = \varepsilon/3$ ein $u_1 \in H_0^1(\hat{\Omega} \cap \{-\delta < x < \delta\})$ mit der Eigenschaft $\gamma_1 u_1 = \phi|_{\Gamma_1}$. (Wähle zunächst ein $\tilde{u}_1 \in H^1(\hat{\Omega} \cap \{0 < x < \delta\})$, welches die Randwertvorgabe auf Γ_1 erfüllt und auf den restlichen Rändern Nullrandwerte hat, und setze dieses anschließend zu einem u_1 in $H_0^1(\hat{\Omega} \cap \{-\delta < x < \delta\})$ fort.)

Wir definieren nun $u : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x - (\varepsilon k, 0, \varepsilon l)) & \text{falls } x - (\varepsilon k, 0, \varepsilon l) \in \hat{\Omega} \cap \{-\delta < x < \delta\} \text{ für } k, l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$: Sei $\varepsilon' > 0$ beliebig und $\tilde{u}_1 \in C_0^\infty(\hat{\Omega} \cap \{-\delta < x < \delta\})$ eine H^1 -Approximation an u_1 mit

$$\|u_1 - \tilde{u}_1\|_{H_0^1(\hat{\Omega} \cap \{-\delta < x < \delta\})} < \varepsilon'.$$

Die Funktion

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \tilde{u}_1(x - (\varepsilon k, 0, \varepsilon l)) & \text{falls } x - (\varepsilon k, 0, \varepsilon l) \in \hat{\Omega} \cap \{-\delta < x < \delta\} \text{ für } k, l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

liegt dann in $C_{\text{per}}^\infty(\Omega)$ mit $\|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} < 2\varepsilon'$. \square

Lemma A.4: Es sei $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ beliebig mit $\phi|_{\Gamma_i} = 0$ für jede periodische Randkomponente Γ_i von Ω . Dann gibt es ein $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ mit $\gamma u = \phi$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch eine analoge Konstruktion. \square

Die vorangegangenen Resultate ermöglichen es nun, die umgekehrte Richtung in (A.1) zu zeigen:

Proposition A.5: Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_i u \cong \gamma_j u$ für gegenüberliegende periodische Ränder Γ_i, Γ_j von Ω . Dann ist $u \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$.

Beweis: Mit Hilfe von Lemma A.3 und Lemma A.4 konstruiert man ein $u_0 \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ mit $\gamma u_0 = \gamma u$. Die Differenz $w := u - u_0$ erfüllt dann $\gamma w = 0$ und liegt nach Lemma A.2 in $H_0^1(\Omega)$. Aus Lemma A.1 folgt schließlich $w \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$.

Es ist damit $u = w + u_0 \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$. \square

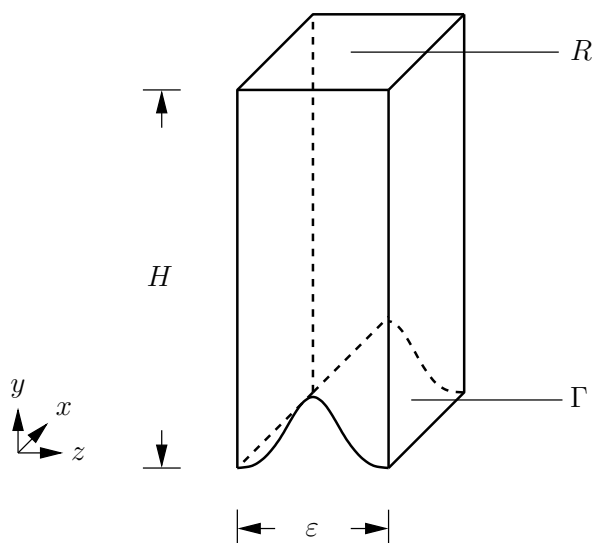


Abbildung A.1: Die Einheitszelle Ω : Auf der rauen Oberfläche Γ seien Nullrandwerte und auf R eine Überströmung \mathbf{V} vorgegeben

A.2 Lösungstheorie des periodischen Stokes-Problems

In diesem Abschnitt sei ein Existenzresultat für das lineare Stokes-Problem mit gemischten periodischen und inhomogenen Rändern vorgestellt. Wir betrachten die aus dem stationären Modell (Kapitel 3) bekannte Einheitszelle Ω (vgl. Abb. A.1) und suchen nach Lösungen des variationellen Stokes-Problems:

Definition A.1 (Stokes-Problem): Gegeben sei die Einheitszelle Ω (vgl. Abb. A.1) mit vorgegebener, räumlich konstanter Überströmung $\mathbf{V} = (V_1, 0, V_3)$ auf R und einer rauen Oberfläche Γ mit Nullrandwerten.

Mit Hilfe der in Kapitel 3 eingeführten Räume

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma, \mathbf{v} = 0 \text{ auf } R \right\}, \\ \hat{V} &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma, \mathbf{v} = \mathbf{V} \text{ auf } R \right\}, \end{aligned}$$

ist ein Geschwindigkeitsfeld sowie ein skalarer Druck

$$\mathbf{v} \in \hat{V}, \quad p \in L^2(\Omega) / \mathbb{R},$$

gesucht, so dass die *Stokes-Gleichungen* erfüllt sind:

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) - (p, \nabla \cdot \varphi) = 0, & \forall \varphi \in V, \\ (\nabla \cdot \mathbf{v}, \xi) = 0, & \forall \xi \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Proposition A.6: Ist die Randkomponente Γ von Ω durch einen C_{per}^2 -Graphen gegeben, so besitzt das System (A.2) eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Der Beweis dieser Aussage folgt dem Vorgehen im analogen Fall von reinen (inhomogenen) Dirichletdaten, d. h. durch Einschränken auf den Unterraum der divergenzfreien Funktionen folgt die Existenz der Geschwindigkeit \mathbf{v} nach dem *Rieszischen Darstellungssatz*. Die Existenz des Drucks p wird durch das *Theorem von de Rham* gesichert. Besondere Vorsicht ist allerdings aufgrund der betrachteten periodischen Räume geboten.

Gesucht ist zunächst ein $\mathbf{v}^0 \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3$ mit $\nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0$, welches die inhomogenen Randwertvorgaben $\mathbf{v}^0 = \mathbf{V}$ auf R und $\mathbf{v}^0 = 0$ auf Γ erfüllt. Hierfür definieren wir $\phi \in H^1(\Omega)^3$ durch

$$\phi(\mathbf{x}) := \mathbf{V} \frac{y}{H},$$

und betrachten die modifizierte Aufgabe:

$$\text{„Suche } \mathbf{v}^0 \in H^1(\Omega)^3 \text{ mit } \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0 \text{ in } \Omega \text{ und } \mathbf{v}^0 = \gamma\phi \text{ auf } \partial\Omega\text{.“}$$

Ein solches \mathbf{v}^0 existiert nach (dem unten formulierten) Lemma A.7, da $\gamma\phi$ die notwendigen Kompatibilitätsbedingungen erfüllt: $\gamma\phi \in H^{1/2}(\Omega)$ und $\int_{\partial\Omega} \gamma\phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$.

Die Funktion \mathbf{v}^0 wurde gerade so konstruiert, dass die Spuren von \mathbf{v}^0 auf gegenüberliegenden, periodischen Rändern Γ_i, Γ_j von Ω identisch sind:

$$\gamma_i \mathbf{v}^0 \cong \gamma_j \mathbf{v}^0 \text{ in } H^{1/2}(\Gamma_i)^3.$$

Damit ist nach Proposition A.5 bereits $\mathbf{v}^0 \in H_{\text{per}}^1(\Omega)^3$.

Es bleibt, das folgende *homogene* Stokes-Problem zu lösen:

Suche $\mathbf{w} \in V$ und $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{w}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) - (p, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) = -(\nabla \mathbf{v}^0, \boldsymbol{\varphi}), & \forall \boldsymbol{\varphi} \in V, \\ (\nabla \cdot \mathbf{w}, \xi) = 0, & \forall \xi \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Wir stellen hierfür fest, dass der Raum $V_{\text{div}} := \{\boldsymbol{\varphi} \in V : \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0\}$ zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{V_{\text{div}}} := (\nabla \mathbf{f}, \nabla \mathbf{g})_{L^2(\Omega)}$$

ein Hilbertraum ist, da aufgrund der Nullrandwerte auf Γ und der Beschränktheit von Ω eine Poincaré-Ungleichung gilt:

$$\|\nabla \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^9} \leq C(\Omega) \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Weiterhin ist damit

$$-(\nabla \mathbf{v}^0, \nabla \cdot) \in V_{\text{div}}^*,$$

so dass nach dem *Riesz'schen Darstellungssatz* die Existenz eines eindeutig bestimmten $\mathbf{w} \in V_{\text{div}}$ folgt mit

$$(\nabla \mathbf{w}, \nabla \varphi) = -(\nabla \mathbf{v}^0, \nabla \varphi) \quad \forall \varphi \in V.$$

Das gesuchte Geschwindigkeitsfeld ist also $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}^0$.

Nach der (unten) in Proposition A.8 formulierten Version des *Theorems von de Rham* gibt es nun ein bis auf eine Konstante eindeutig bestimmtes $p \in L^2(\Omega)$, so dass

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi) - (p, \nabla \cdot \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V.$$

□

Lemma A.7: Zu jeder Randwertvorgabe $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)^3$ mit $\int_{\partial\Omega} \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$ gibt es ein $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$ mit $\gamma \mathbf{v} = \phi$ und $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ in Ω .

Beweis: Da $H^{1/2}(\partial\Omega)^3$ das Bild von $H^1(\Omega)^3$ unter dem Spuroperator γ ist, gibt es ein $\mathbf{v}^0 \in H^1(\Omega)^3$ mit $\gamma \mathbf{v}^0 = \phi$.

Nach (Temam 2001, Lemma I.2.4) ist der Divergenzoperator in der Form

$$(\nabla \cdot \cdot) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \left\{ g \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

surjektiv. Da nach dem Gaußschen Satz gerade

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}^0 \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0,$$

folgt die Existenz eines $\mathbf{v}^1 \in H_0^1(\Omega)$ mit $\nabla \cdot \mathbf{v}^1 = \nabla \cdot \mathbf{v}^0$ in Ω . Die gesuchte Funktion ist dann gerade $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^1$. □

Proposition A.8 (Theorem von de Rham): Die folgenden beiden Eigenschaften sind für stetige, lineare Funktionale $f \in V^*$ äquivalent:

- i.) Es gilt $f(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V$ mit $\nabla \cdot \varphi = 0$.
- ii.) Es gibt ein $p \in L_0^2(\Omega)$ mit $-(p, \nabla \cdot \varphi) = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in V$.

Das in (ii.) gegebene p ist in $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0\}$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Rückrichtung „ii.) \rightarrow i.)“ ist klar. Die Implikation „i.) \rightarrow ii.)“ ist mit Hilfe des Theorems von Nečas äquivalent zu

$$\exists \alpha > 0 : \inf_{p \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in V} \frac{-(p, \nabla \cdot v)}{\|p\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^9}} \geq \alpha.$$

Diese Bedingung ist sicherlich erfüllt, falls die *stärkere* (man beachte, dass $H_0^1(\Omega)^3 \subset V$ nach Prop. A.5) Inf-sup-Bedingung

$$\exists \alpha > 0 : \inf_{p \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^3} \frac{-(p, \nabla \cdot v)}{\|p\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^9}} \geq \alpha$$

erfüllt ist. Diese ist aber gerade äquivalent zum klassischen *Theorem von de Rham* für $H_0^1(\Omega)^n$, bzw. $C_0^\infty(\Omega)^n$, wie es z. B. in (Temam 2001, Proposition 1.1) zu finden ist. \square

Proposition A.9 (Theorem von Nečas): Seien V, W Hilberträume. Zu gegebenem $a : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$, bilinear und stetig, betrachte das Problem:

Sei $l \in V^*$, so dass für alle $v \in V$ mit der Eigenschaft $a(w, v) = 0 \forall w \in W$ bereits $l(v) = 0$ folgt. Suche (das eindeutig bestimmte) $p \in W$ mit

$$a(p, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

Dieses Problem ist genau dann wohlgestellt, falls es $\alpha > 0$ gibt, mit

$$\inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha. \quad (\text{A.4})$$

Beweis: Betrachte

$$\tilde{V} = V / \{v \in V : a(p, v) = 0 \forall p \in W\}.$$

Dann ist

$$\tilde{a} : W \times \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{a}(p, v) = a(p, v),$$

wohldefiniert, bilinear und stetig mit der Eigenschaft

$$\forall v \in \tilde{V} : (\tilde{a}(p, v) = 0 \forall p \in W) \Rightarrow v = 0. \quad (\text{A.5})$$

Betrachte nun

$$A : W \rightarrow \tilde{V}^*, \quad p \mapsto (v \mapsto \tilde{a}(p, v)).$$

Die Abbildung A ist linear und stetig und ihr Bild liegt dicht. Letzteres folgt aus der Tatsache

$$\overline{\text{Bild}(A)} = \left(\text{Kern}(A^{\text{adj}}) \right)^\perp \subset \tilde{V}^*$$

mit dem adjungierten Operator

$$A^{\text{adj}} : \tilde{V} \longrightarrow W^*, \quad v \mapsto (p \mapsto \tilde{a}(p, v)).$$

Dieser hat aber nach (A.5) trivialen Kern.

Die Bedingung (A.4),

$$\exists \alpha > 0 : \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in \tilde{V}} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha$$

ist durch einfaches Umformen äquivalent zu

$$\exists \alpha > 0 : \quad \|w\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \left(\sup_{v \in \tilde{V}} \frac{a(w, v)}{\|v\|_V} \right) = \frac{1}{\alpha} \|Aw\|_{V^*} = \frac{1}{\alpha} \|Aw\|_{\tilde{V}^*} \quad (\text{A.6})$$

Für eine beliebige Cauchyfolge Aw_i ist nun zum Einen stets das Urbild w_i zu Aw_i wohldefiniert, sowie folgt wegen (A.6) die Konvergenz $w_i \rightarrow w$ zu einem Grenzwert w in W . Damit folgt sofort wegen der Stetigkeit von A , dass $Aw_i \rightarrow Aw$ in \tilde{V} . Damit ist $\text{Bild}(A)$ abgeschlossen und A damit surjektiv. A ist weiterhin injektiv, somit nach dem Satz von der offenen Abbildung letztendlich ein Isomorphismus. Umgekehrt folgt im Fall, dass A ein Isomorphismus ist, (A.6) direkt aus der Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Es bleibt noch anzumerken, dass

$$\tilde{V}^* = \{l \in V^* : (v \in V \text{ mit } a(p, v) = 0 \forall p \in V) \Rightarrow l(v) = 0\}.$$

□

Bemerkung: Die Bedingung (A.6) ist äquivalent zu der Annahme, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass die folgende Aufgabe stets eine Lösung besitzt: Es gibt zu jedem $p \in W$ ein $v \in \tilde{V}$ so dass $p = \nabla \cdot v$ mit $\|\nabla v\| \leq C \|p\|$.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Bei verschiedenen Haispezies gefundene Ribletstrukturen auf den Placoidschuppen (Abbildungen aus Steuben u. Krefft 1995)	2
1.2	Zur Definition von periodischen Ansatzräumen auf Ω	7
2.1	Laminare Grenzschicht einer in Strömungsrichtung orientierten Platte .	19
2.2	Turbulenter Umschlag einer laminaren Grenzschicht über einer geraden Platte anhand des Verlaufs der Grenzschichtdicke $\delta(\mathbf{x})$	19
2.3	Verlauf des Mittelwertes der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung einer turbulenten Grenzschicht	21
2.4	Bei Haien auftretende Ribletstrukturen auf den Placoidschuppen und schematisches Modell	24
2.5	Qualitatives Verhalten der Strömungswiderstandsänderung in Abhängigkeit von der Riblethöhe	24
2.6	Laminare Strömungsprofile in Haupt- und Querströmungsrichtung über einer Ribletgeometrie	25
2.7	Ribletstrukturen verschieben longitudinale Wirbel nach oben	26
3.1	Die Einheitszelle Ω	28
3.2	Transformation T_{K_i} der Referenzzelle \hat{K} auf eine Zelle K_i des Gitters .	34
3.3	Lokale Verfeinerung bei Hexaedern	35
3.4	Optimale Verteilung der Freiheitsgrade einer Q^2 -Zelle durch isoparametrische Transformation	36
3.5	Die untersuchten Riblet- und Noppenstrukturen	45
3.6	Die untersuchten Stentstrukturen	46
3.7	Unterschiedliche Simulationsgebiete einer Geometrie mit gleicher periodischer Lösung	50
3.8	Strömungsprofil $v_z(y)$ auf einer Ribletgeometrie	56
3.9	Zur Frage des Einflusses von Mikrostrukturen im Simulationsgebiet und in der physikalischen Realität	58
3.10	Umlenkeffekt von Ribletstrukturen	59
4.1	Zur Definition der Einheitszelle Ω^ε	64
4.2	Zum Homogenisierungsprozess	66
4.3	Zur Definition des Zellproblems auf dem Gebiet Z_{bl}	68
4.4	Zur Wahl des Quaders $K = K_1 \cup K_2$ im Beweis von Proposition 4.3 . .	70

4.5	Lokale Verfeinerung beim zweidimensionalen laplaceartigen Zellproblem der Ribletstruktur	77
5.1	Das für die Simulation einer instationären Strömung über Ribletstrukturen verwendete Strömungsgebiet Ω	83
5.2	Schema zur Funktionsweise von hybriden Verfahren, sowie zum Einkoppeln von Randdaten in das Strömungsgebiet Ω	84
5.3	Das am <i>Center of Smart Interfaces</i> in Darmstadt simulierte Gebiet Ω^a einer turbulenten Kanalströmung	86
5.4	Zur Wahl der Randwertvorgabe einer instationären Strömung auf Ω	87
5.5	Differenz des errechneten Geschwindigkeitsfeldes \boldsymbol{v} auf dem Quader Ω zu den erhaltenen Simulationsdaten $\boldsymbol{v}^{\text{sim}}$	95
5.6	Zur Wahl der Zeitschrittweite	96
5.7	Ergebnis der Simulation einer Strömung \boldsymbol{v} auf Ω für verschiedene Zeitschrittweiten $k = 0.03, 0.06$ und 0.09	97
5.8	Schema der vier simulierten Geometrien mit den entsprechenden Randtypen	98
5.9	Differenz $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{\text{sim}})$ des errechneten Geschwindigkeitsfeldes \boldsymbol{v} zu den erhaltenen Simulationsdaten $\boldsymbol{v}^{\text{sim}}$ auf der Geometrie mit glattem Rand bei vollen dirichletschen bzw. gemischten dirichletschen und natürlichen Randbedingungen	100
5.10	Zeitverlauf der Energie und des Strömungswiderstands für die Geometrie mit glattem Rand bei vollen dirichletschen bzw. gemischten dirichletschen und natürlichen Randbedingungen	101
5.11	Zeitverlauf der Energie und des Strömungswiderstands für die drei simulierten Geometrien	103
A.1	Die Einheitszelle Ω	109

Tabellenverzeichnis

3.1	Vergleich des errechneten Strömungswiderstands $\mathcal{F}_{h,i}$ für die Riblet- und Noppengeometrie auf dem 1×1 -, dem 3×3 - und dem verschobenen Rechengebiet	51
3.2	Vergleich des errechneten Strömungswiderstands $\mathcal{F}_{h,i}$ für die Riblet- und Noppengeometrie mit freiem und periodisiertem Druck	52
3.3	Vergleich des errechneten Strömungswiderstands $\mathcal{F}_{h,i}$ für die Riblet- und Noppengeometrie mit globaler und lokaler Verfeinerung	53
3.4	Ergebnisse der direkten numerischen Simulation der Ribletgeometrien	54
3.5	Ergebnisse der direkten numerischen Simulation der Stentgeometrien	55
3.6	Eindringtiefen der simulierten Geometrien in x - und z -Richtung, sowie der Überströmungsrichtung $\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$	57
3.7	Vergleich des Gesamtströmungswiderstands mit dem Strömungswiderstand des virtuellen Couetteprofils in Überströmungsrichtung $\boldsymbol{\xi}$	58
3.8	Vergleich des Strömungswiderstands der einzelnen Strömungskomponenten $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_z$ mit dem entsprechenden Strömungsanteil $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}$ des virtuellen Couetteprofils in Überströmungsrichtung	59
3.9	Eindringtiefen der simulierten Geometrien und Differenz der Werte von Haupt- und Querströmungsrichtung	60
3.10	Vergleich der Eindringtiefen zweier Überströmungen mit $\mathbf{V} = (1, 1)$ bzw. $\mathbf{V} = (16, 16)$	61
3.11	Eine Simulation der Geometrien mit einer modifizierten Höhe von $H = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - h_{p,\boldsymbol{\xi}}$	61
4.1	Extrapolierter Wert von C_{bl}^{e3} für die Ribletgeometrie für unterschiedliche Höhen des zweidimensionalen, stokesartigen Zellproblems	76
4.2	Extrapolierter Wert von C_{bl}^{e3} für die Ribletgeometrie für unterschiedliche Skalierungen des Parameters d der regularisierten Dirac-Distribution (4.13) zur Zellgröße h	76
4.3	Ergebnisse der zweidimensionalen Zellprobleme (Proposition 4.6 u. 4.7) für die simulierten Ribletgeometrien	78
4.4	Ergebnisse des dreidimensionalen Zellproblems (4.5) für die simulierten, dreidimensionalen Strukturen	79
4.5	Vergleich der aus der direkten numerischen Simulation errechneten Eindringtiefe $h_{p,i}$ (vgl. Tabelle 3.6) mit der Schätzung $h_{p,i}^{\text{eff}}$ aus dem Zellproblem nach (4.9)	80

4.6	Vergleich des aus der direkten numerischen Simulation errechneten Strömungswiderstands \mathcal{F}_i (vgl. Tabelle 3.4 u. 3.5) mit der Schätzung $\mathcal{F}_i^{\text{eff}}$ aus dem Zellproblem nach (4.10)	80
4.7	Vergleich des zeitlichen Mittelwertes des Strömungswiderstands in Hauptströmungsrichtung mit dem Schätzwert nach Gleichung (4.15)	81

Literaturverzeichnis

Alt 2006

ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis*. 5., überarbeitete Auflage. Springer-Verlag, 2006

Apel 1999

APEL, Thomas: *Anisotropic finite elements: Local estimates and applications*. Teubner, Stuttgart, 1999 (Advances in Numerical Mathematics)

Bechert u. a. 1985

BECHERT, D. W.; BARTENWERFER, M.; HOPPE, W.-E. ; REIF, G.: On the drag reduction of the shark skin. In: *AIAA, Shear Flow Control Conference*, 1985, S. 1–18

Bechert u. a. 2000

BECHERT, D. W.; BRUSE, M. ; HAGE, W.: Experiments with three-dimensional riblets as an idealized model of shark skin. In: *Experiments in Fluids* 28 (2000), S. 403–412

Bechert u. a. 1997

BECHERT, D. W.; BRUSE, M.; HAGE, W.; VAN DER HOEVEN, J. G. T. ; HOPPE, G.: Experiments on drag-reducing surfaces and their optimization with an adjustable geometry. In: *Journal of Fluid Mechanics* 338 (1997), S. 59–87

Becker 1998

BECKER, Roland: *Weighted Error Estimators for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rapport de recherche N 3458, 1998

Becker u. Braack 2001

BECKER, Roland; BRAACK, Malte: A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections. In: *Calcolo* 38 (2001), S. 173–199

Becker u. Braack 2004

BECKER, Roland; BRAACK, Malte: A two-level stabilization scheme for the Navier-Stokes equations. In: *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2003* (2004), S. 123–130

Becker u. Rannacher 2001

BECKER, Roland; RANNACHER, Rolf: An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. In: *Acta Numerica* 10 (2001), S. 1–102

Braack 2005

BRAACK, Malte: *Complex Flow Problems: Mesh- and Model Adaption with Stabilized Finite Elements*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Habilitationsschrift, 2005

Braack u. Richter 2006

BRAACK, Malte; RICHTER, Thomas: Solutions of 3D Navier-Stokes benchmark problems with adaptive finite elements. In: *Computers & Fluids* 35 (2006), S. 372–392

Carey u. Oden 1984

CAREY, Graham F.; ODEN, J. T.: *Finite Elements, Volume III, Computational Aspects*. Prentice-Hall, 1984 (The Texas Finite Element Series)

Chorin u. Marsden 2000

CHORIN, Alexandre J.; MARSDEN, Jerrold E.: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. third edition. Springer-Verlag, 2000

Friedmann 2005

FRIEDMANN, Elfriede: *Riblets in the Viscous Sublayer. Optimal Shape Design of Microstructures*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Dissertation, 2005

Friedmann u. Richter 2007

FRIEDMANN, Elfriede; RICHTER, Thomas: Optimal microstructures. Drag Reducing mechanism of riblets. In: *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* (2007, 2010 angenommen)

Jäger u. Mikelić 1996

JÄGER, Willi; MIKELIĆ, Andro: On The Boundary Conditions at the Contact Interface between a Porous Medium and a Free Fluid. In: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* 23 (1996), S. 403–564

Jäger u. Mikelić 2001

JÄGER, Willi; MIKELIĆ, Andro: On The Roughness-Induced Effective Boundary Conditions for a Viscous Flow. In: *Journal of Differential Equations* 170 (2001), S. 96–122

Jäger u. Mikelić 2003

JÄGER, Willi; MIKELIĆ, Andro: Couette Flows over a Rough Boundary and Drag Reduction. In: *Communications in Mathematical Physics* 232 (2003), S. 429–455

Klein 2009

KLEIN, Ole: *Numerische Implementierung periodischer Randbedingungen in Gascoigne und Anwendungen*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Diplomarbeit, 2009

Rannacher 2006

RANNACHER, Rolf: *Numerische Methoden der Kontinuumsmechanik*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Vorlesungsskriptum, 2006

Richter 2010

RICHTER, Thomas: *Numerische Methoden der Fluid-Struktur Wechselwirkungsprobleme*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Vorlesungsskriptum, 2010

Schlichting u. Gersten 2000

SCHLICHTING, Hermann; GERSTEN, Klaus: *Boundary Layer Theory*. 8th revised and enlarged edition. Springer-Verlag, 2000

Schmich 2009

SCHMICH, Michael: *Adaptive Finite Element Methods for Computing Nonstationary Incompressible Flows*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Dissertation, 2009

Steuben u. Krefft 1995

STEUBEN, Kuno; KREFFT, Gerhard: *Die Haie der Sieben Meere. Arten, Lebensweise und sportlicher Fang*. Verlag Paul Parey, 1995

Stoer u. Bulirsch 2005

STOER, Josef; BULIRSCH, Roland: *Numerische Mathematik 2*. 5. Auflage. Springer-Verlag, 2005

Stroh 2010

STROH, Alexander: *Reactive control of skin friction drag in turbulent flows using upstream sensors*, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2010

Temam 2001

TEMAM, Roger: *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. AMS Chelsea Publishing, 2001

Walsh 1983

WALSH, M. J.: Riblets as a viscous drag reduction technique. In: *AIAA Journal* 21 (1983)

*„Grenzschichten sind in allen Bereichen des
Lebens von besonderer Bedeutung.“*

— **Dr. Michael Maier**

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. Rolf Rannacher für die Möglichkeit, meine Diplomarbeit in seiner Arbeitsgruppe zu schreiben. Ich bin über das Interesse und die damit verbundene Unterstützung sehr dankbar.

Herrn PD Dr. Christoph Garbe möchte ich für die Bereitschaft danken, die Zweitbetreuung der Diplomarbeit von Seiten der Physikalischen Fakultät zu übernehmen.

Mein besonderer Dank gebührt Frau Dr. Elfriede Friedmann. Die Unterstützung mit ihrem Wissen und ihrer Erfahrung im Bereich der Grenzschichttheorie waren von unschätzbarem Wert.

Ich bedanke mich bei Dr. Bettina Frohnapfel und Dipl.-Ing. Alexander Stroh vom Center of Smart Interfaces der Technischen Universität Darmstadt für die Möglichkeit im Rahmen meiner Diplomarbeit auf turbulente Simulationsdaten zugreifen zu dürfen.

Weiterhin danke ich der Arbeitsgruppe Numerik für das kollegiale Klima und die stets „offenen Türen“, insbesondere Dr. Michael Besier und Dr. Thomas Richter für ihre Hilfe bei allen Fragen im Bereich der Numerik und der Implementierung in der Software Gascoigne, sowie Dr. Winnifried Wollner, der für alle analytischen Fragestellungen stets ein hilfreicher und erhellender Diskussionspartner war.

Ich danke Christian Dornes, Mirko Rösner, Martin Schrön und Dominik Zobel für das Korrekturlesen der Arbeit.

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 26. Januar 2011

.....