THE RAMANUJAN JOURNAL, 7, 367–384, 2003

Perspectives de l'Approximation Diophantienne et de la Transcendance

PAULA B. COHEN* pcohen@math.tamu.edu
Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, Texas 77843-3368

In memory of Robert A. Rankin

Received September 3, 2002; Accepted September 19, 2002

Abstract. Nous discutons de certains aspects de l'approximation diophantienne et de la transcendance inspirés par deux problèmes encore ouverts: trouver une version effective du théorème de finitude de Siegel pour les points entiers sur les courbes et trouver une approche intrinsèque aux résultats de transcendance des valeurs spéciales des fonctions modulaires sans utiliser les variétés abéliennes (problème posé par Th. Schneider).

Key words: Padé approximation, Thue-Siegel principle, diophantine approximation of algebraic numbers

2000 Mathematics Subject Classification: Primary—11D59, 11J81, 11J89, 11J91

1. Introduction

D'excellents survols récents des vastes sujets de la transcendance, l'indépendance algébrique et l'approximation diophantienne existent dans la littérature: par exemple [23, 71, 73, 74]. Nous avons choisi de nous concentrer ici sur certains aspects de l'approximation diophantienne et de la transcendance inspirés par deux problèmes encore ouverts: trouver une version effective du théorème de finitude de Siegel pour les points entiers sur les courbes et trouver une approche intrinsèque aux résultats de transcendance des valeurs spéciales des fonctions modulaires sans utiliser les variétés abéliennes (problème posé par Th. Schneider).

En 1929, en utilisant les méthodes de l'approximation diophantienne ineffective, C.L. Siegel a démontré un résultat de finitude des points entiers sur les courbes affines de genre positif ou de genre zéro avec au moins trois points distincts à l'infini. La méthode de Baker, qui provient de la théorie des nombres transcendants, reste l'outil le plus puissant pour obtenir des résultats d'approximation diophantienne effective. Cependant, une version effective du résultat de Siegel en genre quelconque reste hors de portée (le cas de genre 0 ou 1 est du à Baker, Coates avec des raffinements par W.M. Schmidt. Des résultats en genre

*The author thanks the Université des Sciences et Technologies de Lille (USTL), France, where the author was employed by the CNRS, and Princeton University, USA, where the author was a Visiting Professor for 2001/2002, for their hospitality during the preparation of this article. Much of this article was the text of a lecture given at the Journées Arithmétiques de Lille, held at USTL in 2001.

$g \geq 2$ dans le cas "galoisien" sont dus à Bilu (1988), et indépendamment par Dvornicich-Zannier (1994)). Ce problème a inspiré Bombieri d'introduire une nouvelle méthode [21] d'approximation diophantienne effective sur le groupe multiplicatif, basée sur le principe de Thue-Siegel, et plus proche du travail original de Siegel sur les courbes. Nous discuterons de progrès récents de ce programme de Bombieri.

Le septième problème de Hilbert demandait une démonstration de la transcendance de nombres de la forme α^β avec $\alpha \neq 0, 1$ et β algébriques et β irrationnel. Ce problème était résolu indépendamment par Gel'fond et Th. Schneider en 1934. En développant la méthode de Gel'fond, Baker a réussi en 1966 à minorer les formes linéaires en un nombre quelconque de logarithmes de nombres algébriques. En 1985, à la suite de travaux de Baker, Coates, Masser et Lang sur certains cas, G. Wüstholz a démontré par son théorème du sous-groupe analytique, l'extension aux groupes algébriques des résultats de Baker. Ce théorème permet de démontrer de nombreux résultats de transcendance de valeurs de fonctions spéciales et modulaires reliées aux espaces de modules de familles de groupes algébriques. Nous discuterons de quelques exemples récents. Il paraît très difficile de démontrer ces résultats de façon directe, sans passer par les familles de groupes algébriques. Cela reflet une manque d'outils pour traiter les espaces de modules directement.

Je remercie le Comité Scientifique des Journées Arithmétiques de Lille de m'avoir invité à faire un exposé sur le contenu de cet article aux Journées. Je remercie Yann Bugeaud et Michel Waldschmidt d'avoir lu cet article et d'avoir fait de nombreuses corrections et suggestions.

2. Approximation de nombres algébriques par des rationnels

En 1955, Roth [60] a démontré son résultat célèbre sur l'approximation des nombres algébriques par les rationnels. Notons $\bar{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques. Soit $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ de degré au moins 2. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ telle que

$$|\alpha - p/q| \geq c(\alpha, \varepsilon)/|q|^{2+\varepsilon}, \tag{2.1}$$

pour tout $p/q \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1$. Ce résultat est précis comme on peut le voir à l'aide des fractions continues. Or, il n'est pas effectif car on ne peut pas en général calculer la constante $c(\alpha, \varepsilon)$. Des résultats existent qui bornent le nombre de $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) = 1$ et $|\alpha - p/q| \geq |q|^{2+\varepsilon}$ mais nous ignorons ces nombres, par exemple nous n'avons pas de bornes pour $\max(|p|, |q|)$ et certainement pas d'algorithme pour trouver ces nombres. Le résultat de Roth donne une *mesure d'irrationalité ineffective*. D'autres résultats plus faibles avaient été obtenus par Thue, Siegel, Dyson et Gelfond. Nous nous intéresserons exclusivement aux *mesures d'irrationalité effectives*, qui dans l'état actuel de nos connaissances sont beaucoup plus faibles que les mesure ineffectives mais qui sont celles dont nous avons très souvent besoin pour les applications diophantiennes.

Definition 2.1. Soit α un nombre irrationnel. On dit qu'un nombre réel $\mu > 0$ est une *mesure d'irrationalité* de α si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ telle que

$$|\alpha - p/q| \geq c(\alpha, \varepsilon)/|q|^{\mu+\varepsilon}, \tag{2.2}$$

pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $(p, q) = 1$. La mesure d'irrationalité μ est dite *effective* si la constante $c(\alpha, \varepsilon)$ est calculable explicitement.

Pour les mesures d'irrationalité *effectives* valables pour tout nombre algébrique, le premier résultat remonte à Liouville en 1844 [48], qui a trouvé $\mu = \deg(\alpha)$ pour tout nombre algébrique α de degré au moins 2. Ce résultat est facile à démontrer mais trop faible pour les applications. Dans [44], Feld'man améliorait le résultat de Liouville en utilisant les minorations de formes linéaires en logarithmes trouvés par Baker [6]. Ce résultat de Baker-Feld'man donne une mesure d'irrationalité effective $\mu = \deg(\alpha) - \eta(\alpha)$ pour tout nombre algébrique de degré au moins 2, mais avec cependant un $\eta(\alpha) > 0$ très petit. Les meilleurs estimations connues de $\eta(\alpha)$ découlant de la méthode de Baker sont dues à Baker et Stewart [10] si α est de degré 3 et à Bugeaud et Györy [33], qui utilisent des résultats de Waldschmidt [72], dans le cas général.

Des mesures d'irrationalité *effectives* non-triviales pour les nombres algébriques étaient obtenues par Baker [4] avant les travaux de Baker-Feldman, mais elles s'appliquent à une classe restreinte de nombres algébriques. Déjà, en 1918, A. Thue avait étudié les approximations rationnelles de certaines fonctions en utilisant des approximants de Padé. Ces méthodes avaient été reprises par Siegel en 1929 dans ses travaux sur les G-fonctions, pour obtenir des mesures de transcendance et d'indépendance algébrique effectives. Baker utilisait une méthode reliée aux fonctions hypergéométriques en déterminant explicitement des approximants de Padé de certaines fonctions algébriques. Par exemple, Baker à trouvé le résultat remarquable,

$$|\sqrt[3]{2} - p/q| \geq 10^{-6} q^{-2.955},$$

valable pour tout entier $p, q \geq 1$. D'autres travaux de Chudnovsky [35] et plus récemment d'Easton, Voutier et Bennett [14] ont développé la méthode hypergéométrique. Bennett a en particulier étendu les résultats de Baker au cas des $\sqrt[n]{2}, n \geq 3$. Baker a aussi obtenu [5] de bonnes mesures d'irrationalité effectives pour une classe de nombres de la forme $\log(a/b)$ avec a/b proche de 1.

Mentionnons ici un résultat récent de Bauer et Bennett [13] qui dit qu'il existe des constantes absolues $c_1, c_2 > 0$ telles que,

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq c_1 q^{-1.47}$$

pour q une puissance de 2 et

$$\left|\sqrt{3} - \frac{p}{q}\right| \geq c_2 q^{-1.62}$$

pour q une puissance de 3.

Une difficulté rencontrée pour généraliser la méthode hypergéométrique, ou de Padé, est qu'il faut, pour les applications, s'assurer d'une croissance exponentielle de l'ordre au plus e^{cn} pour les coefficients des approximants de Padé d'ordre n d'une fonction algébrique. La situation générale donne le plus souvent une croissance de l'ordre e^{cn^2}, ce qui est trop faible pour les applications. Si l'on considère une fonction algébrique donnée par une équation $f(x, y) = 0$ de degré d en y, on peut y associer son approximant de Padé près de $x = 0$, d'ordre n, de la forme $p_0(x) + p_1(x)y + \cdots + p_{d-1}(x)y^{d-1}$, où les polynômes $p_i(x)$ sont de degré au plus n. Dans [19] la croissance e^{cn} ou e^{cn^2} est reliée précisément à une propriété géométrique de la courbe, à savoir si certains diviseurs de degré 0 de la courbe $f(x, y) = 0$ sont des points de torsion de la jacobienne ou non. C'est d'ailleurs une généralisation de travaux antérieurs de D.V. et G.V. Chudnovsky [36] dans le cas elliptique.

Au cours des dix dernières années une nouvelle approche aux approximations diophantiennes effectives, qui n'utilise ni les méthodes de la transcendance ni les méthodes hypergéométriques, a été introduite par Bombieri [21] et développée dans des articles en commun avec Hunt [26], Mueller [27], van der Poorten, Vaaler [28] et l'auteur [24, 25]. Elle est basée sur la *méthode de Thue-Siegel*. Bombieri a montré comment retrouver une mesure d'irrationalité effective non-triviale pour les racines de nombres algébriques d'ordre élevé à partir du principe de Thue-Siegel et ensuite comment en déduire une mesure d'irrationalité effective non-triviale pour tout nombre algébrique.

Pour ce faire, il faut comprendre comment approximer un nombre $A \neq 0$ dans un corps de nombres k par un sous-groupe multiplicatif Γ finiment engendré dans $k^* = k \setminus \{0\}$. Notons par M_k l'ensemble des valuations de k. Pour un élément $v \in M_k$, soit $v \mid \infty$, soit $v \mid p$ où p est un nombre premier rationnel. Les valeurs absolues $|\ |_v$ de k sont normalisées de telle façon à ce que, pour $x \in k$,

$$|x|_v = \|x\|_v^{d_v/d}$$

où $[k_v : \mathbb{Q}_v] = d_v$, $[k : \mathbb{Q}] = d$ et $\|x\|_v$ est l'unique extension au complété k_v de la valeur absolue usuelle sur les réels $\mathbb{R}$ ou bien la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}_p$. Avec ces normalisations la *formule du produit* devient,

$$\prod_{v \in M_k} |x|_v = 1, \quad x \in k^*.$$

Pour un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ dans k^m et un élément $v \in M_k$, nous définissions

$$|\mathbf{x}|_v = \max(|x_1|_v, \ldots, |x_m|_v).$$

La hauteur absolue (homogène) de $\mathbf{x}$ est donnée par,

$$H(\mathbf{x}) = \prod_{v \in M_K} |\mathbf{x}|_v.$$

La hauteur absolue logarithmique de $\mathbf{x}$ est alors donnée par

$$h(\mathbf{x}) = \log H(\mathbf{x}).$$

Pour $x \in k$ notons par $H(x)$ la hauteur du vecteur $(1, x) \in k^2$. Alors,

$$H(x) = \prod_{v \in M_k} \max(1, |x|_v).$$

La hauteur logarithmique absolue de x est donnée par $h(x) = \log H(x)$.

Cette définition s'étend à celle de la hauteur d'un polynôme P en plusieurs variables et à coéfficients dans k en prenant pour $H(P)$ la hauteur absolue du vecteur de tous les coefficients de P, avec la hauteur logarithmique correspondante $h(P) = \log H(P)$. Pour $v \in M_k$, nous notons $|P|_v$ le maximum les valuations v-adique des coefficients de P.

Si $\xi \in \Gamma$, où Γ est de rang $t > 0$ et $\xi_1, \ldots, \xi_t$ sont des générateurs de $\Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$, minorer $|\xi - A|_v$ est la même chose que de minorer une quantité de la forme $|A^{-1}\xi_1^{n_1} \ldots \xi_t^{n_t} - 1|_v$, et en prenant des logarithmes cela nous ramène à minorer une forme linéaire en logarithmes de la forme $n_1 \log \xi_1 + \cdots + n_t \log \xi_t - \log A$, d'où le lien avec les minorations effectives de formes linéaires en logarithmes.

Les applications de résultats effectifs de ce genre sont bien connues. En effet, la *méthode de Baker* donne des bornes effectives pour les solutions en entiers rationnels de beaucoup d'équations diophantiennes. Des exemples d'équations diophantiennes que l'on sait traiter sont: celles qui correspondent aux courbes de genre 0 ou 1 (Baker, Coates, W.M. Schmidt); l'équation de Thue,

$$F(x, y) = y^r f(x/y) = m \neq 0, \tag{2.3}$$

où $f \in \mathbb{Z}[u]$ est un polynôme irréductible de degré $r \geq 3$ et $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$; les équations elliptiques, hyperelliptiques et superelliptiques

$$y^n = f(x), \quad n \geq 2, \quad f \in \mathbb{Q}(x),$$

de genre au moins 1; les courbes modulaires $X(N)$, $N \geq 2$ (Kubert et Lang) et $X_1(N)$, $N \geq 4$, et $X_0(N)$, $N \neq 1, 2, 3, 5, 7, 13$ (Bilu [16], et [18]).

La motivation de l'approche de Bombieri était d'utiliser des méthodes algébro-géométriques, et non transcendantes, avec le but (encore à réaliser) de trouver une version effective du résultat de Siegel qui dit que chaque courbe affine C définie sur $\mathbb{Q}$ et de genre au moins 2 n'a qu'un nombre fini de points entiers rationnels.

Mentionnons ici des versions effectives du résultat de Siegel obtenues en genre $g \geq 2$ indépendamment par Bilu (1988) [15], et Dvornicich-Zannier (1994) [42] au cas des courbes $F(x, y) = 0$ où $F(X, Y) = 0$ définit une extension galoisienne de $\mathbb{C}(X)$ comme polynôme en Y. Poulakis a obtenu une version quantitative (1996) [59] et Bilu a indépendamment obtenu une version quantitative plus fine (1997) [17].

Il est utile ici de rappeler les étapes principales de la démonstration de ce résultat de Siegel. Nous suivons ici les articles de Bombieri [21] et [23]. La courbe C peut être plongée dans sa jacobienne Jac(C), qui est un groupe algébrique commutatif muni d'une métrique complexe $d(,)$ pour un plongement complexe convenable de la jacobienne. Les points entiers rationnels de C deviennent alors des éléments du groupe de Mordell-Weil de la jacobienne, qui est un groupe finiment engendré. Si l'on suppose que le nombre de points entiers rationnels est infini, on peut supposer que dans la jacobienne il y a une suite infinie $\{P_i\}$ de points entiers qui s'accumulent à son origine. Donc, il existe un $\kappa > 0$ "petit" tel que

$$d(P_i, 0) \ll H(P_i)^{-\kappa}, \quad \kappa > 0.$$

La multiplication dans $\mathrm{Jac}(C)$ fournit, pour chaque entier r, un endomorphime étale $[r]$ et on peut écrire

$$P_i = [r]Q - U_i$$

avec

$$d([r]Q, U_i) \ll H(P_i)^{-\kappa},$$

et donc

$$d\left(Q, \frac{1}{[r]}U_i\right) \ll H(P_i)^{-\kappa} \ll H(Q)^{-\kappa r^2}.$$

En choisissant r grand, nous avons réussi à remplaçer l'exposant du début κ par un exposant κr^2 suffisament grand pour que le problème soit traitable, de façon ineffective (dans l'état actuel de nos connaissances), par des méthodes de l'approximation diophantienne.

Le premier pas du projet de Bombieri, qui déjà n'est pas evident, est d'adapter et effectiviser cette approche pour le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Soit Γ un sous-groupe multiplicatif de k^* de rang t et $\xi_1, \dots, \xi_t \in \Gamma$ multiplicativement indépendants. Nous cherchons à savoir la distance, par rapport à $v \in M_k$, des éléments d'une classe $A\Gamma \neq 1$ à 1. Cela nous ramène au problème de borner effectivement, pour $\kappa > 0$, l'ensemble exceptionnel des $A\xi$, $A \in k^*$, $\xi \in \Gamma$, avec

$$|A\xi - 1|_v \leq H(A\xi)^{-\kappa}, \quad v \in M_k.$$

Pour chaque entier $r \geq 0$, nous disposons de l'endomorphisme, $[r] : x \mapsto x^r$ dans $\mathbb{G}_m$. Les mêmes types d'argument qu'avant nous permettent, en utilisant la géométrie des nombres, de réduire le problème au cas $t = 1$, ce qui correspond aux formes linéaires en deux logarithmes. Écrivons $\xi = \varepsilon\xi_1^{m_1} \dots \xi_t^{m_t}$ et prenons deux entiers positifs Q, N avec $L := \mathrm{ppmc}(1, 2, \dots, Q)$. Par un théorème de Dirichlet, il existe des entiers p_i et q, $1 \leq q \leq Q$ tels que

$$\left|\frac{m_i}{LN} - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{1}{Q^{1/t}q}, \quad i = 1, \dots, t.$$

Or $r = LN/q$ est un entier divisible par N avec $LN/Q \leq r \leq LN$ et tel que

$$|m_i - rp_i| \leq rQ^{-1/t}, \quad i = 1, \dots, t.$$

En posant $a = \varepsilon A \prod \xi_i^{m_i - rp_i}$ et $\gamma = \prod \xi_i^{-p_i}$ nous avons

$$|a(\gamma)^{-r} - 1|_v = |A\xi - 1|_v.$$

On est amené à contrôler effectivement les $\gamma^{-1}a^{1/r}$ avec

$$|\gamma^{-1}a^{1/r} - 1|_v \leq H(\gamma^{-1}a^{1/r})^{-r\kappa}, \quad \gamma \in k^*.$$

Il s'agit donc de trouver une mesure d'irrationalité effective pour les racines de nombres algébriques. Comme

$$h(a^{1/r}) \leq (1/r)h(A) + tQ^{-1/t} \max h(\xi_i)$$

est petit, la hauteur du nombre à approximer est contrôlée, ce qui permet d'exploiter les méthodes directes du numéro suivant, Section 3.

Nous avons par exemple dans le cas ultramétrique [24]:

Théorème 2.2. *Soit k un corps de nombres de degré d et $v \in M_k$ avec $v \mid p$. Soit Γ un sous-groupe finiment engendré de k^* et $\xi_1, \ldots, \xi_t$ des générateurs de Γ modulo torsion. Soit $\xi \in \Gamma$, $A \in k^*$ et $\kappa > 0$ tels que*

$$0 < |1 - A\xi|_v < H(A\xi)^{-\kappa}.$$

Notons $Q = \prod_{i=1}^{t} h'(\xi_i)$ où $h'(\xi) = \max(h(\xi), 1)$. Alors,

$$h(A\xi) \leq c(\kappa, t, d, v)Q \max(h'(A), Q)$$

où $c(\kappa, t, d, v)$ est une fonction explicite de $\kappa, t, d,$ et v.

3. Mesures d'irrationalité effectives pour les racines

Nous gardons les notations du Section 2. Pour $v \in M_k$, $r \geq 3$ un entier rationnel, $a, \gamma \in k^*$, et α une racine r-ième de a, nous cherchons à mesurer la distance entre α et γ par rapport à v, par une inégalité de la forme,

$$|\gamma^{-1}\alpha - 1|_v \geq c(\alpha, \varepsilon, k)H(\gamma^{-1}\alpha)^{-\mu-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

où μ est la mesure d'irrationalité de α.

La méthode de Baker, en utilisant la transcendance et les minorations effectives de formes linéaires en logarithmes, permet de démontrer en général la mesure d'irrationalité

$$\mu = ch(a) \log\left(\frac{r}{h(a)}\right),$$

pour une constante absolue $c > 0$.

Les résultats que l'on peut obtenir en utilisant la méthode de Thue-Siegel, dévelopée par Bombieri, ne donne pas à ce jour un résultat aussi bon, sauf en ce qui concerne la constante absolue qui est typiquement beaucoup plus petite (cela peut avoir des avantages pour les applications). L'intéret de la méthode est néanmoins qu'elle évite toute utilisation de fonctions spéciales transcendantes et aussi des arguments très délicats d'analyse complexe et p-adique qui sont typique des méthodes transcendantes. Cet avantage est encore plus marquant dans le cas où v est ultramétrique ($v \mid p$ pour p un premier rationnel). D'ailleurs, les résultats obtenus par la méthode de Thue-Siegel sont suffisants pour beaucoup d'applications.

La méthode de Thue-Siegel exploite le fait qu'un nombre algébrique ne peut pas avoir deux bonnes approximations par des nombres rationnels. Donc, si le nombre $\alpha = \sqrt[r]{a}$ est proche de 1 par rapport à v il ne peut pas être trop proche de $\gamma \neq 1$ par rapport à v, du moins pour $h(\alpha'), \alpha' = \gamma^{-1}\alpha$ suffisament grand. Pour faire démarrer la méthode, il faut s'arranger, par le choix de r et de la racine α, pour que (α, α') soit proche de $(1, 1)$ par rapport à v. Si ε est une racine r-ième de l'unité, alors $(\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha')$ est proche de $(\varepsilon, \varepsilon)$. La construction auxiliaire par un lemme de Siegel fournit un polynôme $P(X, Y)$ non-trivial, à coefficients entiers rationnels, qui a un zéro d'ordre élevé aux points $(\varepsilon, \varepsilon)$ mais dont les coefficients sont de hauteur controlée. Dans [21, 24] une version du lemme de Dyson dû à Viola permet de dire qu'en dérivant un peu le polynôme P, pour donner un polynôme Q, on peut s'assurer que $Q(\alpha, \alpha') \neq 0$ et $Q(\alpha, \alpha') \in k$ avec les coefficients de Q de hauteur controlée. Un travail récent [25] montre que l'on peut même se passer du lemme de Dyson. Par la formule du produit pour M_k,

$$-\log|Q(\alpha, \alpha')|_v = \sum_{w \neq v} \log|Q(\alpha, \alpha')|_w. \tag{3.1}$$

Comme $Q(X, Y)$ s'annule avec une haute multiplicité au point $(1, 1)$, on peut montrer en utilisant un développement de Taylor autour de $(1, 1)$ que $|Q(\alpha, \alpha')|_v$ est très petit, précisamment parce que (α, α') est proche de $(1, 1)$. (On peut de la même façon exploiter les points $(\varepsilon, \varepsilon)$.) Par conséquent $-\log|Q(\alpha, \alpha')|_v$ est grand tandis que $\sum_{w\neq v} \log|Q(\alpha, \alpha')|_w$ est relativement petit compte tenu des majorations des hauteurs des coefficients de Q. Donc l'hypothèse que (α, α') est proche de $(1, 1)$ par rapport à v entraine une contradiction (pour $h(\alpha')$ suffisament grand). En l'occurence, dans le cas où $v \mid p$, il suffit de supposer $|\alpha - 1|_v < 1$ pour faire marcher le principe de Thue-Siegel.

L'approche simplifiée de [25] donne, dans le cas où $v \mid p$ (le cas $v \mid \infty$ est en cours), une meilleure dépendance de r et $h(a)$ que celle qui utilise le lemme de Dyson à deux variables dans [24] et une constante absolue tres petite. En effet, nous obtenons la mesure d'irrationalité,

$$\mu = ch'(a)p^{f_v}(D_v^*)^6 \log^5\left(\frac{r}{h'(a)}\right), \tag{3.2}$$

avec $c > 0$ une constante absolue (on peut prendre $c \leq 200$). Nous avons noté f_v, e_v le degré du corps résiduel et l'indice de ramification du corps $k_v/\mathbb{Q}_v$ et

$$D_v^* = \max\left(1, \frac{d}{f_v \log p}\right).$$

Nous supposons que $|a|_v = 1$, pour que si nous choisissons $l = p^{f_v} - 1$, alors $|a^l - 1|_v < 1$.

En utilisant la méthode de Baker [8, 30, 34], voir aussi [47] pour le cas archimédien, on peut remplacer $\log^5(\frac{r}{h'(a)})$ par $\log(\frac{r}{h'(a)})$ dans (3.2). Il est intéressant de remarquer que la méthode de Thue-Siegel donne, selon [37], un résultat avec $\log(\frac{r}{h'(a)})$ quitte à supposer que $P(\alpha, \alpha') \neq 0$ (hypothèse très forte car elle élimine les arguments de "lemmes de zéros").

Les résultats de [21] sont suffisants pour retrouver le résultat de Baker Feldman,

$$|\alpha - p/q|_v \geq c(\alpha)|q|^{-r+\eta(\alpha)}$$

où $r = \deg(\alpha)$ et $\eta(\alpha) > 0$, α algébrique, avec $\eta(\alpha) = c(r)R$ proportionnel au régulateur R du corps $\mathbb{Q}(\alpha)$. Ils permettent aussi de borner effectivement les solutions en entiers de l'équation de Thue (2.3), ainsi que l'équation de Thue-Mahler. Dans [30] les méthodes transcendantes sont utilisées pour trouver la mesure d'irrationalité effective des racines et ensuite les arguments de [21] et [24] sont utilisés pour déduire le résultat de Baker-Feldman. Les équations de Thue et de Thue-Mahler sont aussi traitées. Bugeaud obtient ainsi un résultat qui améliore un peu celui de [33] avec $\eta(\alpha) = 10^{26r} r^{14r} R$.

Soulignons la nature élémentaire de la méthode employé dans [25] (où v divise p). Aussi ces méthodes donnent une approche uniforme pour toutes les places. Cette simplicité et uniformité donnent de l'espoir pour une possible et eventuelle généralisation à la situation de Siegel où le groupe multiplicatif est remplacé par une jacobienne.

4. Conjecture *abc* et minoration de formes linéaires en logarithmes

Un des problèmes ouverts les plus marquants de l'approximation diophantienne est la *Conjecture abc* de Masser et Oesterlé. Elle implique en particulier le théorème de Fermat (pour les grands degrés) démontré par Wiles, la conjecture de Catalan, dont la solution vient d'être annoncée par P. Mihailescu [50], et le théorème de Mordell démontré par Faltings. Elle est très facile à formuler.

Conjecture 1 (*abc*). Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une constante $C(\varepsilon) > 0$ avec la propriété suivante. Pour a, b, c entiers positifs avec $a + b = c$, et $(a, b, c) = 1$, nous avons

$$c \leq C(\varepsilon) \prod_{p \mid abc} p^{1+\varepsilon}.$$

On a aussi la forme suivante de la conjecture proposée par Baker [9], voir aussi Philippon [56].

Conjecture 2. Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, et a, b, c entiers positifs avec $a + b = c$, $(a, b, c) = 1$,

$$c \leq C \prod_{p \mid abc} (p/\varepsilon)^{1+\varepsilon}.$$

Stewart et Yu Kunrui [66, 67] ont utilisé les minorations de formes linéaires en logarithmes pour obtenir

$$c \leq C(\varepsilon) \exp\left(\prod_{p \mid abc} p^{1/3+\varepsilon} \right).$$

Baker [9] a démontré que la Conjecture 2 est une conséquence de la Conjecture 3 suivante (qui est très optimiste vu l'etat actuel de nos connaissances). Voir aussi les remarques dans [55], Section 4 sur cette demonstration de Baker. Les valeurs absolues $|\cdot|$ et $|\cdot|_p$ et les log sont les extensions usuelles à $\mathbb{C}$ et à C_p.

Conjecture 3. Soient $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, $v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ et supposons que

$$\Lambda = u_1 \log v_1 + \cdots u_n \log v_n$$

ne s'annule pas. Notons

$$\Theta = \min(1, |\Lambda|) \prod_p \min(1, p|\Lambda|_p).$$

Alors,

$$\log \Theta \geq -C(n) \Big(\max_{i=1,\ldots,n} \log(|u_i| + 1) \Big) \left(\sum_{j=1}^{n} \log |v_j| \right),$$

pour une constante $C(n) > 0$ qui ne dépend que de n.

Philippon [55, 56] en utilisant des conjectures formulées par S. Lang et M. Waldschmidt pour la place archmédienne, a formulée une conjecture analogue qui entraine aussi une version de la Conjecture *abc* sous la forme de l'existence d'un $\kappa > 0$ tel que

$$c \leq \left(\prod_{p \mid abc} p \right)^{\kappa}.$$

5. Dépendance linéaire entre périodes et valeurs spéciales de fonctions modulaires

Dans l'état actuel de nos méthodes, l'étude de la plupart des propriétés transcendantes des valeurs spéciales des fonctions modulaires se ramène à l'étude de relations de dépendance linéaire entre les périodes de fonctions abéliennes. Un problème ouvert est de remplacer ces méthodes par une approche qui n'utilise que les propriétés intrinsèques des fonctions modulaires (problème de Th. Schneider). Un grand succès de ce type, mais dans un contexte un peu différent, a été accompli dans les travaux du groupe de St Étienne [12] sur la fonction modulaire.

Notons A une variété abélienne définie sur un corps de nombres et de dimension complexe $n \geq 1$. Son espace tangent T_A à l'origine $O_A \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ est muni d'une $\bar{\mathbb{Q}}$-structure. L'application exponentielle

$$\exp_A : T_A(\mathbb{C}) \to A(\mathbb{C})$$

à un noyau $L = \exp^{-1}(O_A)$ de $\mathbb{Z}$-rang $2n$. C'est le réseau dans $\mathbb{C}^{2n}$ des vecteurs de périodes de A. Dans le cas $n = 1$, la variété abélienne A est une courbe elliptique, et il existe

$g_2, g_3 \in \bar{\mathbb{Q}}$ avec $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, tels que les points complexes de A sont les solutions complexes de l'équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Le réseau L est engendré par deux périodes $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$ avec ω'/ω de partie imaginaire positive.

Des travaux de Siegel (1932) et Schneider (1937), utilisant le principe naissant dit de Schneider-Lang, ont montré dans le cas $n \geq 1$ que les éléments de L sont des nombres transcendants et que dans le cas $n = 1$ le nombre ω'/ω est transcendant sauf dans le cas de multiplication complexe. Une variété abélienne A se décompose à isogénie près en un produit de puissances de variétés abéliennes simples A_i, $i = 1, \ldots, k$,

$$A \mathrel{\widehat{=}} A_1^{m_1} \times \cdots \times A_k^{m_k},$$

avec A_i et A_j non-isogènes pour $i \neq j$. La variété abélienne A est à multiplication complexe ("CM") (au sens de Shimura et Taniyama) si, pour chaque $i = 1, \ldots, k$, l'algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}_o(A_i)$ est un corps K_i avec $[K_i, \mathbb{Q}] = 2\dim(A_i)$. Le corps K_i est alors une extension quadratique imaginaire d'un corps totalement réel, c'est-à-dire un corps "CM". Dans le cas $n = \dim(A) = 1$, les courbes elliptiques à CM sont celles avec $\mathrm{End}_o(A) = \mathbb{Q}(\tau)$ avec $\tau = \omega'/\omega$ quadratique imaginaire.

Les variétés abéliennes A de dimension n et polarisation E fixée ont pour variétés de modules les variétés modulaires de Siegel. Le réseau L de A est un $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{C}^n$ de rang $2n$ de la forme,

$$L = \mathbb{Z}^n + \tau\mathbb{Z}^n,$$

où τ est une matrice dans l'espace de Siegel de genre n donné par,

$$H_n = \{\tau \in M_n(\mathbb{C}) : \tau = \tau^t, \mathrm{Im}(\tau) \gg 0\}.$$

L'espace réel $\Lambda = L \otimes \mathbb{R}$ de dimension $2n$ est munie d'une forme symplectique E induite par la polarisation de A. Soit

$$\mathrm{Sp}(E) = \{g \in GL(\Lambda) \mid E(gv, gv') = E(v, v'), v, v' \in \Lambda\}$$

le groupe symplectique qui fixe E. Alors $\mathrm{Sp}(E)$ agit sur la variété complexe $S(\Lambda, E)$ de structures complexes I de Λ avec $E(., I.)$ positive définie symétrique, au moyen de l'action

$$(g, I) \mapsto gIg^{-1}, g \in \mathrm{Sp}(E), I \in S(\Lambda, E).$$

Soit T le $\mathbb{C}$-espace vectoriel donné par l'espace propre pour la valeur propre $+i$ de I dans $\Lambda \otimes \mathbb{C}$. Alors, il y a une $\mathbb{C}$-base ordonnée $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de T et une $\mathbb{R}$-base $\{f_1, \ldots, f_{2n}\}$ de Λ telle que la matrice de $(f_{n+1}, \ldots, f_{2n})$ par rapport à $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est donnée par $\tau \in H_n$. Nous notons $I = I_\tau$. Le domaine symétrique hermitien $S(\Lambda, E)$ peut être identifié à H_n avec l'action induite usuelle de $\mathrm{Sp}(E)$ par transformations de Möbius. La variété de modules à une structure sous-jacente de variété quasi-projective V définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ avec

$$V(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Sp}(E, \mathbb{Z})\backslash H_n \simeq \{\text{Classes d'iso. sur } \mathbb{C} \text{ de structures } (A, E)\}.$$

Il existe une application $\mathrm{Sp}(E, \mathbb{Z})$-invariante holomorphe,

$$J : H_n \to V(\mathbb{C})$$

normalisée pour que l'image des modules $\tau \in H_n$ correspondant aux variétés abéliennes CM soient dans $V(\bar{\mathbb{Q}})$. Dans le cas $n = 1$ et $\mathrm{Sp}(E, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nous pouvons choisir pour j la fonction modulaire elliptique usuelle, avec développement de Fourier de la forme

$$j(\tau) = e^{-2i\pi\tau} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi n\tau}, \quad a_n \in \mathbb{Z}.$$

Un résultat célèbre de Th. Schneider (1937) dit alors que τ et $j(\tau)$ sont tous les deux algébriques si et seulement si τ est quadratique imaginaire, c'est-à-dire, le réseau engendré sur $\mathbb{Z}$ par 1 et τ est à CM. Cohen-Shiga-Wolfart ont démontré [38, 64] la généralisation suivante du résultat de Schneider pour $n \geq 1$.

Théorème 5.1. *Nous avons à la fois $\tau \in H_n \cap M_n(\bar{\mathbb{Q}})$ et $J(\tau) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ si et seulement si τ est le module d'une variété abélienne à CM: cette variété abélienne A est donnée à isomorphisme près par le tore complexe*

$$A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^n + \tau\mathbb{Z}^n.$$

Dans [38, 64] ce résultat est démontré comme une conséquence du Théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz, en particulier de son corollaire que voici.

Proposition 5.2. *Soit A une variété abélienne définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ isogène à $A_1^{m_1} \times \cdots \times A_k^{m_k}$ avec les A_i, $i = 1, \ldots, k$ simples, définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et deux-à-deux non-isogènes. Soit $\varphi : T_A(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$ un isomorphisme donné par un choix de $\bar{\mathbb{Q}}$-base de T_A. Alors les composantes des vecteurs dans $\varphi(L)$ où $L = \exp^{-1}(O_A)$ engendrent un espace vectoriel de dimension*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{2\dim(A_i)^2}{[\mathrm{End}_o(A_i) : \mathbb{Q}]}.$$

Qualitativement, ce résultat dit que toutes les relations de dépendance linéaire entre les périodes de formes différentielles abéliennes holomorphes définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$ (périodes de première espèce) proviennent d'endomorphismes. Si A est simple de dimension n dans la Proposition 5.2, alors la dimension de l'espace engendré sur $\bar{\mathbb{Q}}$ par les périodes de première espèce est égale à $2n^2/[E : \mathbb{Q}]$ où $E = \mathrm{End}_o(A)$, son algèbre d'endomorphismes. Pour démontrer le Théorème 5.1 (dans le cas simple), nous supposons que $J(\tau) \in V(\bar{\mathbb{Q}})$, $\tau \in H_n$, c'est-à-dire que dans la classe de variétés abéliennes correspondant à τ il y en a une, A, qui est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Si nous avons aussi $\tau \in M_n(\bar{\mathbb{Q}})$, alors l'espace vectoriel $L_1 = L \otimes \bar{\mathbb{Q}}$

est de $\bar{\mathbb{Q}}$-dimension n. Ces deux hypothèses d'algébricité nous fournissent deux choix de $\bar{\mathbb{Q}}$-bases $\varphi_i : T_A(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$, $i = 1, 2$ où on peut supposer $\varphi_2(L) \subset \bar{\mathbb{Q}}^n$, et induisent des représentations de E dans $M_n(\bar{\mathbb{Q}})$. Or, ces représentations peuvent être entrelacées par une matrice avec moins que $2n^2/[E : \mathbb{Q}]$ coefficients non-nuls, sauf dans le cas CM. Il y a des liens entre cet argument et le cas spécial où E est une algèbre de quaternions indéfinie sur $\mathbb{Q}$ traité dans [51].

On peut se demander quelle est la "fréquence" des valeurs algébriques de la fonction J aux points algébriques. Le Théorème 5.1 montre que ce problème est étroitement relié à des questions de distribution de points CM.

Conjecture 4. Soit Z la clôture de Zariski d'un ensemble de modules $J \in V(\bar{\mathbb{Q}})$ qui sont les valeurs de J à des points $z \in H_n \cap M_n(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors Z est une réunion finie de sous-variétés de $V(\mathbb{C})$ de type Hodge.

Dans le cas où Z est une courbe irréductible définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ qui n'est pas de type Hodge dans une variété modulaire de Siegel, la Conjecture 4 dit que $J(z) \notin Z(\bar{\mathbb{Q}})$ pour $z \in H_n \cap M_n(\bar{\mathbb{Q}})$ sauf si z est dans un ensemble fini de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$-orbites de points CM.

Par les arguments de ce numéro, la Conjecture 4 est équivalente à la Conjecture d'André-Oort [1, 2, 54] suivante.

Conjecture 5. Soit Z une sous-variété irréductible de $V(\mathbb{C})$ telle que les points CM de Z sont denses pour la topologie de Zariski. Alors Z est une sous-variété de $V(\mathbb{C})$ de type Hodge.

Il est intéressant (voir [40] pour le cas $\dim(Z) = 1$) d'envisager la version plus faible de la conjecture d'André-Oort que voici.

Conjecture 6. Soit Z une sous-variété irréductible de $V(\mathbb{C})$ qui contient un ensemble de points CM, dense pour la topologie de Zariski, et dont les variétés abéliennes correspondantes sont dans la même classe d'isogénie. Alors Z est une sous-variété de $V(\mathbb{C})$ de type Hodge.

L'utilité de cette conjecture vient de la Proposition 5.2 que l'on peut réécrire comme.

Proposition 5.3. *Soient A et B deux variétés abéliennes définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et notons par V_A le $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par toutes les périodes $\int_\gamma \omega$ de A avec $\gamma \in H_1(A, \mathbb{Z})$ et $\omega \in H^0(A, \Omega_{\bar{\mathbb{Q}}})$ et également pour B. Alors $V_A \cap V_B \neq \{0\}$ si et seulement s'il existe des sous-variétés abéliennes simples A' de A et B' de B avec A' isogène à B'.*

Une application aux valeurs spéciales des fonctions hypergéométriques classiques en une variable (fonctions hypergéométriques de Gauss) a été développée dans une série d'articles [40, 43, 75] dont [43] démontre la Conjecture 6 dans le cas $\dim(Z) = 1$. La fonction hypergéométrique de Gauss est la fonction $F(a, b, c, x)$ holomorphe multi-valente sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\backslash\{0, 1, \infty\}$ qui est la solution de l'équation différentielle d'ordre 2

$$x(x-1)F'' + ((a+b+1)x - c)F' + abF = 0 \tag{5.1}$$

dont la valeur à $x = 0$ est égale à 1. Pour $a, b, c \in \mathbb{Q}$, avec $-c \notin \mathbb{N}$, Siegel [65] posait la question de la taille et de la nature de l'ensemble exceptionnel $E(a, b, c)$ des $x \in \bar{\mathbb{Q}}$ avec $F(a, b, c, x) \in \bar{\mathbb{Q}}$. Supposons pour simplifier que le groupe de monodromie $\Delta(a, b, c)$ de (5.1) est infini et d'action discontinue sur le demi-plan supérieur. Dans [69] la liste finie des triplets (a, b, c) avec $\Delta(a, b, c)$ arithmétique est calculée. Il y en a une infinité de cas non-arithmétiques. Par les arguments de [39, 75] et [40], qui passent par la Proposition 5.3, l'ensemble exceptionnel $E(a, b, c)$ correspond à un ensemble de points CM dans la même classe d'isogénie sur une courbe $Z(a, b, c)$ dans une variété de Siegel $V(a, b, c)$. La courbe $Z(a, b, c)$ est de type Hodge si et seulement si $\Delta(a, b, c)$ est arithmétique. Donc par le résultat de [43], l'ensemble exceptionnel $E(a, b, c)$ sera infini dans le cas arithmétique et fini dans le cas nonarithmétique. Par exemple, l'ensemble exceptionnel de $F(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{4}{3}, x)$ est infini et celui de $F(\frac{17}{20}, \frac{17}{20}, \frac{27}{20}, x)$ est fini.

Le lien entre ce problème posé par Siegel et Wolfart et la Conjecture 6 était proposé pour la premiére fois par Cohen et Wüstholz dans [40]. Il serait très intéressant de traiter par ces méthodes la nature de l'ensemble exceptionnel de valeurs algébriques aux points algébriques d'autres exemples de fonctions spéciales classiques d'une variable.

Remarquons que tous les résultats mentionnés jusqu'alors dépendent de façon essentielle de résultats d'indépendance linéaire entre périodes abéliennes. Un fameux problème toujours ouvert et posé pour la première fois par Th. Schneider est de redémontrer son résultat sur la transcendance des valeurs de la fonction $j(\tau)$ en utilisant seulement ses propriétés intrinsèques. On peut formuler un problème analogue pour la généralisation en dimension supérieure de la fonction modulaire du Théorème 5.1. Les groupes algébriques sont bien adaptés aux méthodes de la transcendance en particulier à cause du fait qu'à partir d'un point algébrique on peut en fabriquer beaucoup d'autres en utilisant les opérations de composition. De plus, il existe une notion naturelle de complexité arithmétique via la notion de hauteur. Nous manquons à l'heure actuelle des outils analogues pour l'étude des espaces de modules de familles de groupes algébriques.

En 1995 un groupe de mathématiciens de l'Université de St Étienne (Barré-Siriex, Diaz, Gramain, Philibert) a réussi à démontrer un autre type de résultat de transcendance pour la fonction modulaire elliptique en utilisant seulement des propriétés intrinsèques de la fonction. Ils ont démontré une conjecture de Mahler-Manin sous la forme du résultat suivant [12].

Théorème 5.4. *Soit $J = J(q)$ la fonction modulaire vue comme une fonction d'un nombre complexe ou p-adique q avec $0 < |q| < 1$. Alors $J(q)$ est transcendant lorsque q est algébrique.*

Inspiré par ces travaux, Nesterenko [52, 53] a obtenu le résultat spectaculaire suivant d'indépendance algébrique.

Théorème 5.5. *Soit q un nombre complexe ou p-adique avec $0 < |q| < 1$. Alors, trois au moins des quatres nombres*

$$q, P(q), Q(q), R(q)$$

sont algébriquement indépendants.

Les fonctions P, Q, R sont les séries d'Eisenstein normalisées de poids 2, 4, et 6. Au cas complexe, on peut reformuler ce résultat en termes de périodes de fonctions de Weierstrass.

Corollaire. *Soient g_2 et g_3 deux nombres complexes avec $g_2^3 \neq 27g_3^2$. Notons par ω_1, ω_2 des générateurs du réseau aux invariantes g_2 et g_3 et η_1, η_2 les quasi-périodes correspondantes. Alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps*

$$\mathbb{Q}(g_2, g_3, \omega_1/\pi, \eta_1/\pi, e^{2i\pi\omega_1/\omega_2})$$

est au moins 3.

Ce résultat implique l'indépendance algébrique des trois nombres.

$$\pi, e^{\pi}, \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

Tout comme pour les problèmes au début de ce numéro, on aimerait généraliser ces énoncés en dimension supérieure: par exemple aux fonctions modulaires de Hilbert (travaux en cours de Daniel Bertrand).

Acknowledgment

The author thanks Yuri Bilu of the Université de Bordeaux for his careful reading of this manuscript and for making several corrections.

References

1. Y. André, *G-Functions and Geometry*, Aspects of Mathematics, Vieweg, 1989.
2. Y. André, "Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire donnée," *J. Reine Angew. Math.* **505** (1998), 203–208.
3. A. Baker, "Rational approximations to certain algebraic numbers," *Proc. London Math. Soc.* **4** (1964), 385–398.
4. A. Baker, "Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers," *Quart. J. Math. Oxford* **15** (1964), 375–383.
5. A. Baker, "Approximations to the logarithms of certain algebraic numbers," *Acta Arith.* **10** (1964), 315–323.
6. A. Baker, "Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV," *Mathmatika* **13** (1966), 204–216; **14** (1967), 102–107, 220–228; **15** (1968), 204–216.
7. A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.
8. A. Baker, "Logarithmic forms," *Notes of a Lecture Delivered at the Symposium on Diophantine Problems*, Boulder, Colorado, June 1994; private communication.
9. A. Baker, "Logarithmic forms and the *abc*-conjecture," in *Dans Number Theory (Eger 1996)* (K. Györy, A. Pethö, and V. Sós, eds.), Walter de Gruyter, Berlin, 1998, pp. 37–44.
10. A. Baker and C. Stewart, "On effective approximations to cubic irrationals," in *Dans New Advances in Transcendence Theory* (A. Baker, ed.), Cambridge University Press, 1988, pp. 1–24.
11. A. Baker and G. Wüstholz, "Logarithmic forms and group varieties," *J. Reine Angew. Math.* **442** (1993), 19–62.
12. K. Barré-Siriex, G. Diaz, F. Gramain, and G. Philibert, "Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin," *Invent. Math.* **124**(1–3) (1996), 1–9.

13. M. Bauer and M. Bennett, "Applications of the hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation," *Ramanujan J.* **6**(2) (2002), 209–270.
14. M.A. Bennett, "Rational approximation to algebraic numbers of small height: The diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$," *J. Reine Angew. Math*. **535** (2001), 1–49.
15. Yu. Bilu (Belotserkovski), "Effective analysis of a new class of Diophantine equations (Russian)," *Vestsi Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz.-Math. Navuk* (6) (1988), 34–39, 125.
16. Yu. Bilu, "Effective analysis of integral points on algebraic curves," *Israel J. Math.* **90** (1995), 235–252.
17. Yu. Bilu, "Quantatitive Siegel's theorem for Galois coverings," *Compositio Math.* **106** (1997), 125–158.
18. Yu. Bilu, "Baker's method and modular curves," in *A Panorama of Number Theory or The View from Bakers Garden* (G. Wüstholz, ed.), Cambridge University Press, 2002.
19. E. Bombieri and P.B. Cohen, with an Appendix by U. Zannier, Siegel's Lemma, Padé Approximations and Jacobians, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sc.*, S. IV, **XX** (1993), 61–89.
20. E. Bombieri, "On the Thue-Siegel-Dyson theorem," *Acta Math.* **148** (1982), 255–296.
21. E. Bombieri, "Effective diophantine approximation on $\mathbf{G}_m$," *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **20** (1993), 61–89.
22. E. Bombieri, "The equivariant Thue–Siegel principle," in *Arithmetic Geometry, Symposia Mathematica* (F. Catanese, ed.), Cambridge University Press, 1997, Vol. 37, pp. 70–86.
23. E. Bombieri, "Forty years of effective results in diophantine theory," in *A Panorama of Number Theory or The View from Bakers Garden* (G. Wüstholz, ed.), Cambridge University Press, 2002.
24. E. Bombieri and P.B. Cohen, "Effective diophantine approximation on $\mathbf{G}_m$, II," *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **24** (1997), 205–225.
25. E. Bombieri and P.B. Cohen, "An elementary approach to effective diophantine approximation on $\mathbb{G}_m$," in *Number Theory and Algebraic Geometry—To Peter Swinnerton-Dyer on his 75th birthday* (Miles Reid and Alexei Skorobogatov, eds.), Cambridge University Press, 2003, pp. 41–62.
26. E. Bombieri, D.C. Hunt, and A.J. van der Poorten, "Determinants in the study of Thue's method and curves with prescribed singularities," *J. Experimental Math.* **4** (1995), 87–96.
27. E. Bombieri and J. Mueller, "On effective measures of irrationality for $\sqrt[r]{a/b}$ and related numbers," *J. Reine Angew. Math.* **342** (1983), 173–196.
28. E. Bombieri, A.J. van der Poorten, and J.D. Vaaler, "Effective measures of irrationality for cubic extensions of number fields," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, IV. Ser. **23**(2) (1996), 211–248.
29. E. Bombieri and J.D. Vaaler, "On Siegel's Lemma," *Inventiones Math.* **73** (1983), 11–32; Addendum, *ibidem* **75** (1984), 377.
30. Y. Bugeaud, "Bornes effectives pour les solutions des équations en S-unités et des équations de Thue-Mahler," *J. Number Theory* **71** (1998), 227–244.
31. Y. Bugeaud, Habilitation, Publ. IRMA 2000, No. 007, http://www-irma.u-strasbg.fr
32. Y. Bugeaud and K. Györy, "Bounds for the solutions of unit equations," *Acta Arith.* **74** (1996), 67–80.
33. Y. Bugeaud and K. Györy, "Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations," *Acta Arith.* **74** (1996), 273–292.
34. Y. Bugeaud and M. Laurent, "Minoration de la distance p-adique entre puissances de nombres algébriques," *J. Number Theory* **61**(2) (1996), 311–342.
35. G.V. Chudnovsky, "On the method of Thue-Siegel," *Ann. Math. II ser.* **117** (1983), 325–382.
36. D.V. et G.V. Chudnovsky, "Padé approximations to solutions of linear differential equations and applications to diophantine analysis," *Dans Number Theory*, New York, 1982, *Lect. Notes Math.* **1052**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, pp. 85–167.
37. P.B. Cohen and A.J. van der Poorten, "Ideal constructions and irrationality measures of roots of algebraic numbers," *Illinois J. Math.* **46**(1) (2002), 63–80.
38. P.B. Cohen, "Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions," *Rocky Mount. J. of Mathematics* **26**(3) (1996), 987–1001.
39. P. Cohen and J. Wolfart, "Modular embeddings for some nonarithmetic Fuchsian groups," *Acta Arithmetica* **LVI** (1990), 93–110.
40. P.B. Cohen and G. Wüstholz, "Applications of the André-Oort conjecture to transcendence," in *A Panorama of Number Theory or The View from Bakers Garden* (G. Wüstholz, ed.), Cambridge University Press, 2002, pp. 89–106.

41. G. Diaz, "La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire," *J. Théor. Nombres Bordeaux* **9** (1997), 229–245.
42. R. Dvornicich and U. Zannier, "Fields containing values of algebraic functions," *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **21** (1994), 421–443.
43. S. Edixhoven and A. Yafaev, "Subvarieties of Shimura varieties," *Annals of Math.* (2) **157**(2) (2003), 621–645.
44. N.I. Feldman, "An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem (en russe)," *Izv. Akad. Nauk.* **35** (1971), 973–990, et *Math. USSR Izv.* **5** (1971), 985–1002.
45. C. Krattenthaler, *Advanced Determinant Calculus* (dedicated to the pioneer of determinant evaluations (among other things), George Andrews), Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **42** (1999), paper 42q, 67pp; see <http://cartan.u-strasbg.fr:80/~slc/>.
46. C. Krattenthaler and D. Zeilberger, "Proof of a determinant evaluation conjectured by Bombieri, Hunt and van der Poorten," *New York J. Math.* **3** (1997), 54–102; see <http://nyjm.albany.edu:8000/nyjm.html>.
47. M. Laurent, M. Mignotte, and Y. Nesterenko, "Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants," *J. Number Theory* **55**(2) (1995), 285–321.
48. J. Liouville, "Remarques relatives à des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques," *C.R. Acada. Sci. Paris* **18** (1844), 883–885 et 910–911.
49. K. Mahler, "Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes über die approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen," *Math. Ann.* **105** (1931), 267–276.
50. P. Mihailescu, "Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture," submitted to *J. Reine Angew. Math*.
51. Y. Morita, "On the transcendency of special values of arithmetic automorphic functions," *J. Math. Soc. Japan* **24**(2) (1972), 268–274.
52. Y.V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence problems—Un théorème de transcendance sur les fonctions modulaires," *C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math*. **322**(10) (1996), 909–914.
53. Y.V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence questions (Russian)," *Mat. Sb.* **187**(9) (1996), 65–96; English translation in Moscow, *Univ. Math. Bull.* **51**(3) (1996), 27–30.
54. F. Oort, "Canonical liftings and dense sets of CM-points," in *Arithmetic Geometry*, Cortona, 1994 (F. Catanese, ed.), *Ist. Naz. Mat. F. Severi*, Cambridge University Press, 1997, pp. 228–234.
55. P. Philippon, "Quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne," *Bull. Austral. Math. Soc.* **59** (1999), 323–334.
56. P. Philippon, "Addendum à quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne," *Bull. Austral. Math. Soc.* **61** (2000), 167–169.
57. A.J. van der Poorten, "Generalised simultaneous approximation of functions" (dedicated to the memory of Kurt Mahler), *J. Austral. Math. Soc.* **51** (1991), 50–61.
58. A.J. van der Poorten, "A powerful determinant," *Experimental Math.* **10** (2001), 307–320.
59. D. Poulakis, "Estimation effective des points entiers d'une famille de courbes algébriques," *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **5**(6) (1996), 691–725.
60. K.F. Roth, "Rational approximations to algebraic numbers," *Mathematika* **2** (1955), 1–20.
61. I. Satake, "Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space," *Amer. J. of Math.* **87** (1965), 425–461.
62. I. Satake, "A note on holomorphic imbeddings and compactification of symmetric domains," *Amer. J. of Math.* **90** (1968), 231–247.
63. I. Satake, "Algebraic structures of symmetric domains," *Pub. Math. Soc. Japan* **14**, Shoten Pub. and Princeton University Press, 1980.
64. H. Shiga and J. Wolfart, "Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions," *J. Reine Angew. Math.* **463** (1995), 1–25.
65. C.L. Siegel, "Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen," *Ges. Werke, Bd.* Berlin, Heidelberg, New York, 1966, Vol. 1, pp. 209–266.
66. C.L. Stewart and K. Yu, "On the *abc* conjecture," *Math. Ann.* **291** (1991), 225–230.
67. C.L. Stewart and K. Yu, "On the *abc* conjecture, II," *Duke Math. J.* **108**(1) (2001), 169–181.

68. T. Struppeck and J.D. Vaaler, "Inequalities for heights of subspaces and the Thue-Siegel principle," *Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in Honor of Paul T. Bateman* (B.C. Bernt, H.G. Diamond, H. Halberstam, and A. Hildebrand, eds.), *Prog. Math.* Birkhäuser, Boston,1990, Vol. 85, pp. 493–528.
69. K. Takeuchi, "Arithmetic triangle groups," *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), 91–106.
70. A. Thue, "Über Annäherungwerte algebraischer Zahlen," *J. Reine Angew. Math.* **135** (1909), 284–305.
71. M. Waldschmidt, *Algebraic Independence of Transcendental Numbers. Gel'fond's Methods and its Developments*. *Perspectives in Mathematics*, Birkhàuser, Basel-Boston, MA, 1984, pp. 551–571.
72. M. Waldschmidt, "Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques," *Canadian J. Math.* **45** (1993), 176–224.
73. M. Waldschmidt, "Un demi-siècle de transcendance," in *Development of Mathematics 1950–2000*, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 1121–1186.
74. M. Waldschmidt, *Algebraic Independence of Transcendental Numbers: A Survey, Number Theory, Trends Math.*, Birkhàuser, Basel, 2000, pp. 497–527.
75. J. Wolfart, "Werte hypergeometrische Funktionen," *Invent. Math.* **92** (1988), 187–216.
76. Yu Kunrui, "p-adic logarithmic forms and group varieties I," *J. Reine Angew. Math.* **502** (1998), 29–92.
77. Yu Kunrui, "p-adic logarithmic forms and group varieties II," *Acta Arithmetica* **89** (1999), 337–378.