для некоторых i и T $ST \cong R_i$ и

$$\partial(S) > (1-2\lambda)\partial(R_i) \qquad (I.3)$$

§ 2. Каноническая форма

Пусть M – множество слов $R_i(a_\mu)$, $i=1,\dots,N$, $\mu=1,\dots,m$, удовлетворяющих условиям I), 2) параграфа I. Предположим, при этом, что множество M состоит из n_1 слов длины $l_1, \dots, n_K$ слов длины l_K и $2 < l_1 < l_2 < \dots < l_K$.

Блочный граф порядка p состоит из конечного множества V (быть может пустого), содержащего p вершин и множества X из q упорядоченных троек (i, u, v), где i – натуральное число, а u, v – различные вершины; при таком определении автоматически исключается петли (ребра, соединяющие вершину с ней самой) и кратные (паралельные) ребра. Вершина $u \in V$ принадлежит к одному из $K+1$ типов и в зависимости от типа имеет вид

0. отрезка, деленного на $l_0 = 2$ равные части

I. отрезка, деленного на l_1 равных частей

. . . .

K. отрезка, деленного на l_K равных частей

$\nu(u)$ – обозначает тип вершины u.

Тройка $x = (i, u, v)$, $1 \le i \le l_j - 1$, $\nu(u) = j$ называется ребром графа, при этом говорят, что ребро x соединяет i – ую точку деления вершины u с вершиной v. Вершины u и v называются смежными, а вершина u считается предшествующей вершине v. Последний факт мы будем отмечать неравенством $u \ll v$. Вершина u и ребро v, так же как вершина v и ребро x, называются инцидентными друг другу. Блочным деревом D называется блочный граф, не имеющий циклов. Множество вершин блочного дерева можно превратить в частично упорядоченное множество с отношением порядка $<$ (от частичного порядка в этом определении требуется только транзитивность) если считать, что $u<v$ в том и только том случае, когда существует последовательность $u_1,\dots,u_p$ вершин такая, что $u \ll u_1 \ll u_2 \ll \dots \ll u_p \ll v$

Вершинами первого уровня блочного дерева D называются нижние грани максимальных цепей в частично упорядоченном множестве $V(D)$ вершин дерева D. Конечными вершинами дерева D называются верхние грани максимальных цепей. Сотрем вершины первого уровня и ребра инцидентные им. Получим опять блочное дерево, множество вершин первого уровня для которого называется множеством вершин второго уровня исходного блочного дерева. Аналогичным образом определяются вершины третьего и последующих уровней. Пусть $\xi(D)$ – обозначает максимальный из уровней вершин дерева D. Мы будем предполагать, что на множестве вершин V задан полный порядок $\tau(D)$, согласованный с введенным ранее отношением $<$. Два блочных дерева D_1 и D_2 называются изоморфными тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение φ множества вершин $V(D_1)$ на $V(D_2)$ сохраняющее смежность и порядок. Множество блочных деревьев обозначим буквой Δ. По определению, пустое множество принадлежит Δ.

Назовем раскраской блочного дерева $D\in\Delta$ отображение ψ множества вершин $V(D)$ в множество слов $\{a_\nu^{\varepsilon}a_\nu^{-\varepsilon}, R_i(a_\mu): \nu,\mu=1,\dots,m, \varepsilon=\pm1, i=1,\dots,N\}$, причем, если $u\in V(D)$, то

$$\psi(u)\in\{a_\nu^{\varepsilon}a_\nu^{-\varepsilon}, \nu=1,\dots,m, \varepsilon=\pm1\} \text{ если } \nu(u)=0$$

$$\psi(u)\in\{R_i:\partial(R_i)=t_1\} \text{ если } \nu(u)=1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\psi(u)\in\{R_i:\partial(R_i)=t_K\} \text{ если } \nu(u)=K.$$

i - ый $(1 \leq i \leq t_{V(u)})$ отрезок деления вершины u на $t_{V(u)}$ равных частей мы раскрасим i - ой буквой слова $\psi(u)$. Два раскрашенных дерева D_1, D_2 называются изоморфными тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение множества $V(D_1)$ на множество $V(D_2)$ сохраняющее смежность, раскраску и порядок. Остовом раскрашенного дерева называется блочное дерево, получающееся в результате стирания раскраски. Через Ω мы обозначим множество раскрашенных деревьев.

Пусть $D \in \Delta$. Продолжим порядок $\tau(D)$ с множества вершин $V(D)$ на множество всех отрезков деления вершин дерева D. Продолжение осуществляется следующим образом. Пусть вершины u и v - смежные, ребро (i, u, v) их соединяет и $\{v_i\}$ - множество всех вершин v_i таких, что $v < v_i$ в смысле частичного порядка на $V(D)$. Тогда все отрезки деления вершины u от 1 -го до i - го включительно считаются предшествующими отрезкам деления вершин $v, v_1, \ldots, v_s$, а отрезки деления вершины u с $(i+1)$ - го до $t_{V(u)}$ -го считаются следующими за отрезками деления вершин $v, v_1, \ldots, v_s$. Отрезки деления вершины u упорядочиваются слева направо. Новый порядок мы как и ранее будем обозначать через $\tau(D)$.

Пусть $D \in \Omega$. Разместим отрезки деления вершин дерева D в порядке $\tau(D)$. При этом получится некоторая последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_n$ отрезков деления. Через $\theta(D)$ обозначим слово $\psi(\xi_1) \ldots \psi(\xi_n)$. Длиной раскрашенного дерева называется длина слова $\theta(D)$.

Каноническая форма $Q(W)$ непустого несократимого слова W равного единице в группе G, множество M определяющих слов которой удовлетворяет условиям I),2),3) параграфа I, это дерево $Q(W) \in \Omega$, которое строится по W следующим образом.

По доказанному ранее, у слова W есть подслово S такое, что $R_{i_1} \cong S_1 T_1$ и $\partial(T_1) < 3\lambda\partial(R_{i_1})$. Если таких подслов несколько, выберем из них то, которое расположено левее остальных. Заменим в W слово S на слово $R_{i_1} T_1^{-1}$. Полученное слово обозначим через W'. Введем в рассмотрение вершину u_1. Если $\partial(R_{i_1}) = l_{\xi_1}$, положим $\nu(u) = \xi_1$ и раскрасим её словом R_{i_1}. Сократим слово W' не затрагивая при этом символов выделенного определяющего слова R_{i_1}. Из полученного слова $W'' \cong U R_{i_1} V$ вычеркнем слово R_{i_1}. При этом получится слово $W''' = U V$. Если слово W''' сократимое, то сокращение может происходить только между последними символом слова U и первым символом слова V, между предпоследним символом слова U и вторым символом слова V и т.д. Предположим, что $U \cong U_1 a_{i_1} \cdots a_{i_p}$, $V \cong a_{i_p}^{-1} \cdots a_{i_1}^{-1} V_1$ и слово $U_1 V_1$ несократимо. Присоединим к вершине u_1 вершины $u_2, \dots, u_{p+1}$ типа 0, раскрасим их словами $a_{i_p} a_{i_p}^{-1}, \dots, a_{i_1} a_{i_1}^{-1}$, а также введем ребра $(1, u_2, u_1), (1, u_3, u_2), \dots, (1, u_{p+1}, u_p)$. Будем считать, что $u_{p+1} \ll u_p \ll \dots \ll u_1$. Слово $U_1 U_2$, равное единице в группе G, обозначим через W_1. Поступим со словом W_1 так же как со словом W: выделим подслово S_2 такое, что $R_{i_2} \cong S_2 T_2$ и $\partial(T_2) < 3\lambda\partial(R_{i_2})$. Введем вершины $v_{q+1} \ll v_q \ll \dots \ll v_1$ а также ребра, соединяющие их последовательно, причем вершина v_1 соответствует слову R_{i_2}, $\nu(v_1) = \xi_2$, если $\partial(R_{i_2}) = l_{\xi_2}$ и, наконец, построим слово W_3. Если слово R_{i_1} располагалось между символами слова S_2 в слове W', и если при этом j_1 символов слова S_2 были расположены левее слова R_{i_1}, то введем ребро (j_1, v_1, u_{p+1}). В противном случае новых ребер не вводим и считаем, что $v_1 < u_{p+1}$ если слово R_{i_1} расположено левее слова S_2 и $v_1 > u_{p+1}$ в противном случае. Со словом

W_3 поступим так же, как поступали со словами W_1, W_2 : выделим подслово S_3 такое, что $R_{i_3} \cong S_3 T_3$ и $\partial(T_3) < 3\lambda \partial(R_{i_3})$. Введем вершины $h_{s+1} \ll \cdots \ll h_1$, а так же ребра, соединяющие их последовательно, причем вершина h_1 соответствует слову R_{i_3} ; $\gamma(h_1) = \xi_3$ если $\partial(R_{i_3}) = t_{\xi_3}$ и, наконец, построим слово W_3. Если слово R_{i_1} располагалось между символами слова S_3 в слове W', то введем ребро (j_2, h_1, u_{p+1}), где j_3 – количество символов слова S_3 расположенных левее слова R_{i_1} в слове W'. Аналогично, если слово R_{i_2} располагалось между символами слова S_3 в W_1', то введем ребро (j_3, h_1, v_{q+1}) где j_3 – количество символов слова S_3, расположенных левее слова R_{i_2} в слове W_1'. В противном случае новых ребер не вводим, а полученное множество вершин упорядочиваем как и в случае пары u_1, v_1. Продолжим эти действия до тех пор, пока на некотором шаге $l+1$ не получим, что W_l равно пустому слову. Описанная процедура полностью определяет каноническую форму $Q(W)$ слова W.

Условимся пустому слову сопоставлять пустое дерево. Через Ω_0 обозначим множество канонических форм.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение канонической формы мы дали в ситуации, когда множество M, определяющих слов группы G удовлетворяет условиям I), 2), 3) параграфа I. Это определение дословно переносится на случай групп, множество определяющих соотношений которых удовлетворяет условиям I),2), 3'), 4). Нужно только на каждом шаге построения канонической формы выбирать слово S такое, что $R_i \cong ST$ и $\partial(T) < 2\lambda \partial(R_i)$. Отметим, что у канонических форм нет конечных вершин нулевого уровня и отображение Q взаимно однозначно.

§ 3. Основная теорема

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть $\mathcal{C}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$ – множество конечноопределенных групп G, множество M_0 определяющих слов $R_i(a_\mu)$, $1\le\mu\le m$ которых, после замыкания относительно операций взятия обратного слова и циклических перестановок слова удовлетворяет условию 3) параграфа I, τ_G – спектральный радиус простого блуждания на группе G. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ и натурального N, существует такое T, что если $G\in\mathcal{C}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$, $|M_0|<N$ и $\min_i \partial(R_i(a_\mu))>T$, то

$$\left|\tau_G-\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\right|<\varepsilon \qquad (3.I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.I главы 2 достаточно доказать, что если H – нормальный делитель группы $F(a_1,\ldots,a_m)$, порожденный множеством определяющих слов M_0, то для произвольного $\varepsilon>0$ и натурального N, существует такое T, что если $|M_0|<N$, $G\simeq F(a_1,\ldots,a_m)/H\in\mathcal{C}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$ и $\min_i \partial(R_i(a_\mu))>T$, то

$$|\alpha_H-\sqrt{2m-1}|<\varepsilon$$

Пусть множество M получается из множества M_0 определяющих слов группы G замыканием относительно операций взятия обратного слова и циклических перестановок. Предположим, что M состоит из N_1 слов длины $t_1,\ldots,$ N_K слов длины t_K. Построим по числам $t_1,\ldots,t_K$ множество Δ блочных деревьев, а по множеству слов M множество Ω раскрашенных блочных деревьев с вершинами $K+1$ типа. Пусть $D\in\Delta$. Если $u\in V(D)$, $\nu(u)=i$, то $\eta(u)=x_i^{t_i}$ называется весом вершины u. Весом $\eta(D)$ дерева D будем называть выражение $\eta(u_1)\cdots\eta(u_p)$, где $u_1,\ldots,u_p$ – вершины дерева D, выписанные в произвольном порядке (естественно, такое определение предполагает, что веса отдельных вершин коммутируют между собой). Весом раскрашенного дерева назовем вес его остова. Определим два формальных степенных ряда

$$\phi(x_0^{t_0}, \dots, x_k^{t_k}) = 1 + \sum_{i_0,\dots,i_k} c_{i_0\dots i_k} x_0^{t_0 i_0} \dots x_k^{t_k i_k} \tag{3.2}$$

где $c_{i_0 \dots i_k}$ обозначает число блочных деревьев веса $x_0^{t_0 i_0} \dots x_k^{t_k i_k}$ у которых нет конечных вершин нулевого уровня и

$$\phi_0(x_0^{t_0}, \dots, x_k^{t_k}) = \sum_{D \in \mathfrak{A}_0} \eta(D) = 1 + \sum_{i_0,\dots,i_k} b_{i_0 \dots i_k} x_0^{t_0 i_0} \dots x_k^{t_k i_k} \tag{3.3}$$

где $b_{i_0 \dots i_k}$ обозначает число канонических форм слов W равных единице в группе G, веса $x_0^{t_0 i_0} \dots x_k^{t_k i_k}$. Ближайшая наша цель - показать, что ряд $\phi(x_0^{t_0}, \dots, x_k^{t_k})$ определяет аналитическую в окрестности нуля функцию переменных $x_0, \dots, x_k$.

Упорядоченным деревом называется дерево с заданным порядком на множестве его вершин, причем этот порядок должен быть согласован с отношением смежности вершин как и в случае блочного дерева (связность дерева не предполагается). Аналогично тому как это делалось для блочных деревьев, вводятся понятия уровней дерева, конечных вершин и т.д.

ЛЕММА 3.I. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, где f_n - число упорядоченных деревьев D с единственной вершиной первого уровня таких, что $|V(D)| = n$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что числа f_n удовлетворяют соотношению

$$f_n = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sum r_i = n-1} f_{r_1} \cdots f_{r_p} \qquad (3.5.)$$

Действительно, от вершины первого уровня могут отходить p, $(1 \le p \le n)$ ребер. Если число p фиксировано, то от p вершин второго уровня дерево может продолжаться независимо, а сумма $\sum_{\sum r_i = n-1} f_{r_1} \cdots f_{r_p}$ охватывает все случаи такого продолжения.

Умножая (3.5) на x^n и суммируя по n, находим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sum r_i = n-1} f_{r_1} \cdots f_{r_p} x^n =$$

$$= x + x \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} \sum_{\sum r_i = n-1} f_{r_1} \cdots f_{r_p} x^{n-1} = x + x \sum_{p=1}^{\infty} f^p(x) = x + \frac{x f(x)}{1 - f(x)}$$

Разрешив последнее уравнение относительно $f(x)$, получаем (3.4).

ЛЕММА 3.2. Пусть $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$, где g_n – число упорядоченных деревьев таких, что $|V(D)| = n$. Тогда

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}[1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}]} \qquad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число вершин первого уровня упорядоченного дерева D равно n. Так как от любой из этих вершин дерево независимым образом продолжается, то перечисляющий ряд деревьев указанного свойства равен $f^n(x)$. Поэтому $g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ ч.т.д. Заметим, что слагаемое 1 появилось из-за того, что мы включаем в рассмотрение пустое дерево.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Имеет место оценка

$$g_n \le N_1 (4+\varepsilon)^n, \quad \varepsilon > 0$$

(N_1 – некоторая константа не зависящая от n).

Действительно, радиус сходимости ряда $g(x)$ равен $1/4$.

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n^{\frac{1}{n}} = 4$.

Пусть D – произвольное блочное дерево, $|V(D)| = n$, а множество $V(D)$ состоит из $i_0, \ldots, i_K$ вершин первого, . . ., K –го уровней $\left(\sum\limits_{j=0}^{K} i_j = n\right)$. Произведем в дереве D следующую перестройку: вершины u дерева D превратим в точки $\Xi(u)$, а начала ребер, исходивших из точек деления вершины u объединим и поместим в $\Xi(u)$. Полученное в результате перестройки дерево обозначим через $\Xi(D)$.

ЛЕММА 3.3. Существует не более $\left[(K+1)2^{2\max\limits_i l_i}\right]^n$ блочных деревьев D таких, что $\eta(D) = x_0^{l_0 i_0} \cdots x_K^{l_K i_K}$ и таких, что при отображении Ξ они переходят в фиксированное дерево $\Xi(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть $\sum\limits_{j=0}^{K} i_j = n = |V(\Xi(D))|$. При восстановлении дерева D по дереву $\Xi(D)$ мы, во-первых, должны решить к какому типу относится каждая из n вершин дерева $\Xi(D)$. Число возможных вариантов при этом равно числу различных размещений в n ящиков i_0 неразличимых объектов нулевого сорта, . . ., i_K неразличимых объектов K –го сорта, так, чтобы в каждом ящике оказалось по шарику, т.е. числу

$$\frac{n!}{i_0!\,i_1!\cdots i_K!} < (K+1)^n$$

После того, как каждой вершине дерева $\Xi(D)$ указан тип, нужно решить вопрос о размещении начал ребер в точки деления. Пусть из вершины $\Xi(u_p)$ дерева $\Xi(D)$ исходит q_p ребер и $\nu(u_p) = i(p)$. Число размещений начал q_p ребер в $l_{i(p)}-1$ точку деления вершины u_p совпадает с числом целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + \cdots + x_{l_{i(p)}-1} = q_p$, а оно равно числу

$$\binom{t_{i(p)}-1+q_p-1}{q_p}$$

Пользуясь тем, что $\sum_p q_p \le n-1$, получаем, что число различных размещений начал ребер не превосходит числа

$$\prod_p \binom{t_{i(p)}-1+q_p-1}{q_p} \le \prod_p \binom{t_{i(p)}\cdot q_p}{q_p} \le 2^{2\sum_p t_{i(p)} q_p} \le 2^{2\max_i t_i \cdot n}$$

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты $C_{i_0 \dots i_K}$ перечисляющего ряда (3.2) удовлетворяют неравенствам

$$C_{i_0 \dots i_K} \le \left[(4+\varepsilon)(K+1)2^{2\max_i t_i}\right]^{\sum_{j=0}^{K} i_j}$$

а значит, перечисляющий ряд $\phi(x_0^{t_0}, \dots, x_K^{t_K})$ определяет функцию переменных $x_0, \dots, x_K$, аналитическую в окрестности нуля.

Пусть $D \in \Delta$. Назовем сечением i -го уровня дерева D ($1 \le i \le \xi(D)$) дерево, состоящее из вершин от 1 - го до i - го уровней включительно, дерева D , расположенных в порядке $\tau(D)$ с тем же отношением смежности, что и в D . Сечение i - го уровня образует самостоятельный объект, для которого естественным образом определяются понятия веса и изоморфизма.

ЛЕММА 3.4. $\Gamma(x_0^{t_0}, \dots, x_K^{t_K})$ - перечисляющий ряд для весов сечений первого уровня. Тогда

$$\Gamma(x_0^{t_0}, \dots, x_K^{t_K}) = \frac{1}{1-(x_0^{t_0}+\dots+x_K^{t_K})} \qquad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечисляющий ряд для весов сечений первого уровня состоящих из n вершин равен $(x_0^{t_0}+\dots+x_K^{t_K})^n$. Следовательно

$$\Gamma(x_0^{t_0}, \dots, x_K^{t_K}) = 1+(x_0^{t_0}+\dots+x_K^{t_K})+\dots+(x_0^{t_0}+\dots+x_K^{t_K})^n+\dots =$$

$$= \frac{1}{1-(x_0^{t_0}+\dots+x_K^{t_K})}$$

Лемма доказана.

Пусть $\Gamma_0(x_0^{t_0},\dots,x_K^{t_K}) = \Gamma(x_0^{t_0},\dots,x_K^{t_K})-1$.

Определим последовательности функций $\phi_n(x_0^{t_0},\dots,x_K^{t_K}), \psi_n(x_0^{t_0},\dots,x_K^{t_K})$ следующим образом

I) $\phi_0 \equiv 1,\ \psi_0 \equiv 0$.

$$\text{2)}\quad \begin{aligned} \phi_{n+1} &= \Gamma(x_0^{t_0}\psi_n^{t_0-1}, x_1^{t_1}\phi_n^{t_1-1},\dots,x_K^{t_K}\phi_n^{t_K-1}) \\ \psi_{n+1} &= \Gamma_0(x_0^{t_0}\psi_n^{t_0-1}, x_1^{t_1}\phi_n^{t_1-1},\dots,x_K^{t_K}\phi_n^{t_K-1}) \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Очевидно, что функции ϕ_n, ψ_n связаны соотношением $\phi_n - 1 = \psi_n$, а коэффициенты при неизвестных $x_0,\dots,x_K$ в степенных рядах ϕ_n , ψ_n стабилизируются с ростом n . Это означает, что если $C^n_{i_0\dots i_K}$ коэффициент в степенном ряде $\phi_n(x_0^{t_0},\dots,x_K^{t_K})$ при весе $x_0^{t_0 i_0}\dots x_K^{t_K i_K}$; то существует такое K , что все $C^n_{i_0\dots i_K}$ равны при $n \geqslant K$.

Нетрудно видеть, что можно положить $K = \sum_{j=0}^{K} i_j$.

ЛЕММА 3.5. $\phi_n \to \phi,\ \psi_n \to \phi - 1$, причем стремление понимается в указанном выше смысле стабилизации коэффициентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дерево D таково, что у него нет конечных вершин нулевого типа, $u \in V(D)$ и $\nu(u) = i > 0$. Из произвольной $(t_i - 1)$ - ой точки деления отрезка u на t_i равных частей, дерево D может быть продолжено, причем перечисляющий ряд весов всех возможных продолжений на один уровень равен $\Gamma(x_0^{t_0},\dots,x_K^{t_K})^{t_0-1}$. Иная ситуация, когда $\nu(u) = 0$.

В этом случае перечисляющий ряд весов всех возможных продолжений на один уровень равен $\Gamma_0(x_0^{t_0}, \ldots, x_k^{t_k})^{t_0-1}$, так как вершины нулевого типа не могут быть конечными вершинами дерева D, а подстановка $x_0 \Gamma^{t_0-1}$ вместо $x_0 \Gamma_0^{t_0-1}$ приводит к тому, что в перечисляющем ряде $\phi(x_0^{t_0}, \ldots, x_k^{t_k})$ будут учтены деревья, у которых конечные вершины могут принадлежать к нулевому типу. Итак,

$\phi_1 = \Gamma$ – перечисляющий ряд для неизоморфных сечений первого уровня;

ϕ_2 – перечисляющий ряд для неизоморфных сечений второго уровня;

. . . .

ϕ_n – перечисляющий ряд для неизоморфных сечений n – го уровня Если $n > \xi(D)$, то сечение n – го уровня дерева D совпадает с деревом D. Следовательно, ряд $\phi' = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n$ учитывает при пересчете веса всех блочных деревьев, среди конечных вершин которых нет вершин нулевого типа и только такие деревья, а значит $\phi' = \phi$ ч.т.д.

ЛЕММА 3.6. Функции ϕ, ψ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\Gamma(x_0^2\psi, x_1^{t_1}\phi^{t_1-1}, \ldots, x_k^{t_k}\phi^{t_k-1}) = \phi(x_0^2, x_1^{t_1}, \ldots, x_k^{t_k})$$
$$\Gamma_0(x_0^2\psi, x_1^{t_1}\phi^{t_1-1}, \ldots, x_k^{t_k}\phi^{t_k-1}) = \psi(x_0^2, x_1^{t_1}, \ldots, x_k^{t_k}) \qquad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (3,9) следует из реккуррентных соотношений (3.8), леммы 3.5 и тех обстоятельств, что ϕ и ψ функции, а $t_0 = 2$.

ЛЕММА 3.7. Перечисляющий ряд ϕ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{t_i}\phi^{t_i} + x_0^2\phi^2 - (x_0^2+1)\phi + 1 = 0 \qquad (3.10.)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции ϕ и ψ связаны соотношением $\phi = \psi + 1$. Используя явный вид функции Γ из первого уравнения системы (3.9) находим

$$\frac{1}{1-x_0^2-x_0^2\phi-x_1^{t_1}\phi^{t_1-1}-\ldots-x_k^{t_k}\phi^{t_k-1}}=\phi$$

или

$$x_1^{t_1}\phi^{t_1}+\ldots+x_k^{t_k}\phi^{t_k}+x_0^2\phi^2-(x_0^2+1)\phi+1=0$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. Коэффициенты $b_{i_0\ldots i_k}$ перечисляющего ряда $\tilde{\phi}(x_0^{t_0},\ldots,x_k^{t_k})$ весов канонических форм не превосходит соответствующие коэффициенты ряда $\phi((2m-1)x_0^2, N_1x_1^{t_1},\ldots,N_kx_k^{t_k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольное раскрашенное дерево (в том числе и каноническая форма) состоит из остова D и его раскраски ψ. Пусть блочное дерево есть остов канонической формы и $\eta(D)=x_0^{2i_0}x_1^{t_1i_1}\ldots x_k^{t_ki_k}$. Оценим сверху число раскрасок превращающих дерево D в каноническую форму. Если $u\in V(D)$ и $1\leqslant \nu(u)\leqslant k$, то существует $N_{\nu(u)}$ возможностей раскрасить эту вершину. Пусть $\nu(u)=0$. Вообще говоря, вершина u может быть раскрашена одним из $2m$ символов $a_\nu^{\varepsilon}a_\nu^{-\varepsilon}$, $\nu=1,\ldots,m,\ \varepsilon=\pm1$. Однако, если ребро (i,u,v) принадлежит дереву D, $\nu(u)=0$, $\psi(u)=xx^{-1}$, и вершина v первая в порядке $\tau(D)$ среди вершин смежных с u и таких, что $u\ll v$, то символ x не может быть обратным к первому символу слова $\psi(v)$. Так как вершины нулевого типа не могут быть конечными вершинами, остова канонической формы, то отсюда следует, что количество вариантов раскраски такой вершины не больше $2m-1$. Следовательно, если блочное дерево состоит из $p_0,p_1,\ldots,p_k$ вершин 0 -го $\ldots$, k - го типов, то это дерево может быть остовом не более чем

$(2m-1)^{p_0}N_1^{p_1}\ldots N_k^{p_k}$ канонических форм. Итак, коэффициенты ряда $\phi((2m-1)x_0^2, N_1x_1^{t_1},\ldots,N_kx_k^{t_k})$ мажорируют сверху коэффициенты перечисляющего ряда $\tilde{\phi}(x_0^{t_0},\dots,x_k^{t_k})$ ч.т.д.

С этого момента мы будем предполагать, что число λ из условия 3) параграфа 5 рационально: $\lambda = \frac{r}{s} < \frac{1}{6}$. (Очевидно, что это предположение не уменьшает общности наших рассуждений).

ЛЕММА 3.9. Пусть $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |H_n| x^n$ – производящая функция нормального делителя H, порожденного множеством M_0 определяющих слов группы G. Тогда радиус сходимости ряда $H(x)$ не меньше радиуса сходимости ряда $\phi((2m-1)x^2, N_1 x^{(1-6\lambda)t_1}, \dots, N_k x^{(1-6\lambda)t_k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ранее было доказано, что коэффициенты ряда $\phi((2m-1)x_0^2, N_1 x_1^{t_1}, \dots, N_k x_k^{t_k})$ мажорируют соответствующие коэффициенты перечисляющего ряда $\tilde{\phi}(x_0^{t_0},\dots,x_k^{t_k})$ весов канонических форм. Пусть W – непустое несократимое слово, $W=1$, $\partial(W)=n$. Напомним, что длиной канонической формы $Q(W)$ называется длина слова $\theta(Q(W))$. Пусть $\eta(Q) = x_0^{t_0 i_0} \cdots x_k^{t_k i_k}$. Покажем, что $\partial(\theta(Q(W)) - \partial(W) < 6\lambda \sum_s t_s i_s$. Действительно, приведем слово $\theta(Q(W))$ к слову W припомощи вписывания и вычеркивания слов вида $a_\nu^{\varepsilon} a_\nu^{-\varepsilon}$ в последовательности обратной к той, которая проводилась при построении канонической формы. Так как при этом, из каждого определяющего слова R можно удалить не более $3\lambda\partial(R)$ сиволов, а при каждом вычеркивании один из символов слова $a_\nu^{\varepsilon} a_\nu^{-\varepsilon}$ обязательно принадлежит к некоторому определяющему слову, то число удаленных символов из слова $\theta(Q(W))$ не превосходит $6\lambda \sum_s t_s i_s$ $\Box$.

Пусть

$$\phi((2m-1)x^2, N_1 x^{(1-6\lambda)t_1}, \dots, N_k x^{(1-6\lambda)t_k}) = \sum_{p=0}^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,p}\, x^{n+\frac{p}{s}} = \varphi^*(x)$$

$$\bar{\phi}(x)=\sum_{q=0}^{\rho-1}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} f_{jq}\Big]x^{n+\frac{q}{\rho}}=\frac{1}{1-x}\sum_{q=0}^{\rho-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,q}\,x^{n+\frac{q}{\rho}}$$

Так как радиус сходимости ряда $\varphi^{*}(x)$ не превосходит 1, то он совпадает с радиусом сходимости $\bar{\phi}(x)$. Пусть $W=1$, $\partial(W)=n$ и $\eta(Q(W))=x_0^{t_0 i_0}\cdots x_K^{t_K i_K}$.

В силу того, что соответствие $W\to Q(W)$ взаимно однозначно, $x^{t_0 i_0}x^{(1-6\lambda)t_1 i_1}\cdots x^{(1-6\lambda)t_K i_K}=x^{i_0 t_0+(1-6\lambda)\sum_s t_s i_s}$ и $i_0 t_0+(1-6\lambda)\sum_s t_s i_s\leq\partial(W)=n$, получаем

$$|H_n|\leqslant\sum_{j=0}^{n}\sum_{\rho=0}^{\rho-1} f_{j,\rho}$$

Следовательно радиус сходимости ряда $H(x)$ не меньше радиуса сходимости ряда $\bar{\phi}(x)$, а значит и радиуса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\rho-1} f_{n,p}\,x^{n+\frac{p}{\rho}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.10. Если существуют такие константы c и σ, что $N_i(t_i)<c\,t_i^{\sigma}$, то радиус сходимости ряда

$$F(x)=\phi\big((2m-1)x^2,\ N_1(t_1)x^{(1-6\lambda)t_1},\ \ldots\ N_K(t_K)x^{(1-6\lambda)t_K}\big)\qquad(3.11)$$

стремится к $1/\sqrt{2m-1}$ при $t_1,\ldots,t_K\to\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $F(x)$ определяется как аналитический в нуле корень уравнения

$$\sum_{s=1}^{K} N_s(t_s)x^{(1-6\lambda)t_s}F^{t_s}+(2m-1)x^2F^2-\big[(2m-1)x+1\big]F+1=0$$

удовлетворяющий условию $F(0)=1$. Ряд $F(x)$ имеет неотрицательные коэффициенты при степенях x. Следовательно, при оценке радиуса сходимости необходимо учитывать наименьшую положительную особенность ξ функции $F(x)$, причем так как показатель роста нормального делителя группы F_m больше $\sqrt{2m-1}$, можно считать, что $\xi<1/\sqrt{2m-1}$. Множество положительных особых точек функции $F(x)$ находится среди положительных решений x_ℓ системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,\mu)=\sum\limits_{s=1}^{K} N_s(t_s)x^{(1-6\lambda)t_s}\mu^{t_s}+(2\mu-1)x^2\mu^2-[(2m-1)x^2+1]\mu+1=0 \\ F_2(x,\mu)=\sum\limits_{s=1}^{K} t_s N_s(t_s)x^{(1-6\lambda)t_s}\mu^{t_s-1}+2(2m-1)x^2\mu-(2m-1)x^2-1=0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Наряду с системой (3.12) рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (2m-1)x^2\mu^2-[(2m-1)x^2+1]\mu+1=0 \\ 2(2m-1)x^2\mu-(2m-1)x^2-1=0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Точка$\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}},1\right)$ – единственное положительное решение этой системы. Покажем, что все решения системы (3.12), принадлежащие полосе

$Q=\{0<\lambda<\frac{1}{\sqrt{2m-1}},\ 0<\mu\}$ стремятся к решению $\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}},1\right)$

при $t_1,\dots,t_K\to\infty$. Первое уравнение системы (3.13) определяет в плоскости переменных x,μ прямую $\mu=1$ и квадратичную гиперболу $\mu=\frac{1}{(2m-1)x^2}$. Обозначим через Γ_1 и Γ_2 сужения этих кривых на область Q. Второе уравнение системы (3.13) определяет в плоскости (x,μ) квадратичную гиперболу $\mu=\frac{(2m-1)x^2+1}{2(2m-1)x^2}$, сужение которой на область Q мы обозначим через Γ_3. Функция $F_1(x,\mu)$ выпукла по μ при $\mu>0$, а $F_2(x,\mu)$ монотонно возрастает по $\mu>0$ при фиксированном x. Следовательно, уравнение $F_1(x,\mu)=0$ определяет две кривые $\tilde\Gamma_1,\tilde\Gamma_2$ в области Q, являющиеся решениями этого уравнения, а уравнение $F_2(x,\mu)=0$ определяет кривую $\tilde\Gamma_3$. Пусть x_0 фиксировано $\left(0<x_0<\frac{1}{\sqrt{2m-1}}\right)$ и $\mu\in[1,\mu_0]$, где $\mu_0 x_0^{(1-6\lambda)}<1$.

Так как

$$K(x,\mu)=\sum_{s=1}^{n} N_s(t_s)x^{(1-6\lambda)t_s}\mu^{t_s}\xrightarrow[\min_i t_i\to\infty]{}0$$

в силу того, что $N_s(t_s)<ct_s^{c}$ и $x_0^{(1-6\lambda)}\mu<1$, то меньший корень $\mu(x_0)$ уравнения $F_1(x_0,\mu)$ стремится к 1 при $\max_i t_i\to\infty$ равномерно по x, $0<x<\frac{1}{\sqrt{2m-1}}$, причем $\mu(x_0)\to 1$ при $x_0\to 0$. Следовательно $\mu(x)=F(x)$.

Сравним между собой решения уравнений

$$2(2m-1)x^2\mu(x)-(2m-1)x^2-1=0$$

$$F_2(x,\mu)=\sum_{s=1}^{K} t_s N_s(t_s)x^{(1-6\lambda)t_s}\mu^{t_s-1}+2(2m-1)x^2\mu-(2m-1)x^2-1=0$$

Обозначим через $I(x_0)$, значение $F_2(x,\mu)$ в точке $\left(x_0,\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}\right)$.

$$I(x_0)=F_2\left(x_0,\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}\right)=\sum_{s=1}^{K} t_s N_s(t_s)x_0^{(1-6\lambda)t_s}\left[\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}\right]^{t_s-1}$$

а через $R(x_0)$ значение $\frac{\partial(F_2(x,\mu))}{\partial\mu}$ в той же точке

$$R(x_0)=\sum_{s=1}^{K} t_s(t_s-1)N_s(t_s)x_0^{(1-6\lambda)t_s}\left[\frac{(2m-1)x^2+1}{2(2m-1)x^2}\right]^{t_s-1}$$

Так как $0<\sum_{s=1}^{K} t_s N_s(t_s)x^{(1-6\lambda)t_s}\mu^{t_s-1}$ при $x>0,\mu>0$, то кривая $\tilde{\Gamma}_3$ находится не выше кривой Γ_3. Пусть $(x_0,\mu_0)\in\tilde{\Gamma}_3$. Сравним между собой числа μ_0 и $\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}$.

Так как производная $\frac{\partial F_2(\mu,x)}{\partial\mu}$ с ростом $\mu,(\mu>0)$ возрастает, то

$$0<\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}-\mu_0<\frac{I(x_0)}{R(x_0)}\leq\frac{1}{\min_i(t_i-1)}\;\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}$$

Нами установлено, что кривая $\tilde{\Gamma}_3$ попадает в $\frac{1}{\min(t_i-1)}\;\frac{(2m-1)x_0^2+1}{2(2m-1)x_0^2}$

окрестность квадратичной гиперболы $\mu = \frac{(2m-1)x^2+1}{2(2m-1)x^2}$. Раннее мы показали, что при $t_1, \dots, t_K \to \infty$ кривая $\widetilde{\Gamma}_1$ стремится к кривой $\{0<x<\frac{1}{\sqrt{2m-1}}, \mu=1\}$. Отсюда следует, что все точки пересечения кривых $\widetilde{\Gamma}_1$, $\widetilde{\Gamma}_3$ (а они являются решениями систем (3.12)) стремятся к точке $(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}, 1)$ ч.т.д.

Завершим доказательство теоремы 3.1. Пусть множество M_0 состоит из r_1 слов длины $t_1, \dots,$ r_K слов длины t_K, $\sum_j r_j < N$. Если N_1 – число слов длины $t_1, \dots, N_K$ – число слов длины t_K в множестве слов M, получающемся симметризацией множества M_0, то $N_1 \leq 2r_1 t_1, \dots, N_K \leq 2r_K t_K$.

Следовательно в лемме 3.10 можно положить $C = 2\max_j r_j$, $\sigma = 1$. Так как радиус сходимости r ряда $H(x)$ не меньше радиуса сходимости r_ϕ ряда $\phi((2m-1)x^2, N_1 x^{(1-6\lambda)t_1}, \dots, N_K x^{(1-6\lambda)t_K})$, а $r_\phi \xrightarrow[t_i\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$, то $\frac{1}{r_\phi} \geq \frac{1}{r} = \alpha_H \longrightarrow \sqrt{2m-1}$ ибо $\alpha_H > \sqrt{2m-1}$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{W_i(a_\mu)\}$, $i=1,\dots,n$, $\mu=1,\dots,m$ набор несократимых слов такой, что никаких два различных циклических сдвига слов из множества $\{W_i\}$ не есть степени одного и того же слова. Тогда спектральный радиус простого блуждания на группе

$$G = \langle a_1, \dots, a_m \mid W_1^{t_1} = \dots = W_n^{t_n} = e \rangle$$

стремится к $\frac{\sqrt{2m-1}}{m}$ при $t_1, \dots, t_n \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, во-первых, что можно считать определяющие слова W_i циклически некоартимыми. Покажем, что существует такое L, что если $l_1 > L, \dots, l_n > L$, то при сокращении слова $W_i^{l_i} W_j^{l_j}$ поглощается менее чем $1/6$ часть букв слова $W_j^{t_j}$, $i,j=1,\dots,n$. Предположим противное. Тогда существуют такие натуральные α и β, что

$$\alpha > \frac{12 \max\limits_{1\le i\le n} \partial(W_i)}{\min\limits_{1\le i\le n} \partial(W_i)}$$

$$\beta > \frac{12 \max\limits_{1\le i\le n} \partial(W_i)}{\min\limits_{1\le i\le n} \partial(W_i)}$$

и для некоторых $i(\alpha)$, $j(\beta)$ при сокращении слова $W_{i(\alpha)}^{\alpha} W_{j(\beta)}^{\beta}$ поглощается не менее чем I/6 часть букв слова $W_{j(\beta)}^{\beta}$. Следовательно, для подходящих t и τ имеет место равенство

$$A^t A' \cong B^\tau B'$$

где A – некоторый циклический сдвиг слова $W_{i(\alpha)}$, A' – начало слова A, B – некоторый циклический сдвиг слова $W_{i(\beta)}$, B' – начало слова B и

$$\partial(A^t A') \geq \frac{1}{6}\partial(W_{j(\beta)}^{\beta}) \geq \frac{\beta}{6}\partial(W_{j(\beta)}) \geq 2 \max_{1\le i\le n} \partial(W_i) \geq$$

$$\geq \partial(AB)$$

Отсюда согласно пункту 2.3 § 2 главы I монографии [I6] получаем, что существует такое слово D, что $A \cong D^K$, $B \cong D^S$ при некоторых K и S. Мы пришли к противоречию. Следовательно, существует такое L, что если $l_1 > L, \dots, l_n > L$, то множество определяющих слов группы G удовлетворяет условию теоремы 3.I. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Мы доказали теорему 3.I в предположении, что множество M_0 определяющих слов группы G после симметризации удовлетворяет условию 3) параграфа I. Нетрудно видеть, что все проведенные рассуждения проходят если класс групп $\mathcal{B}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$ заменить классом групп $\mathcal{E}_\lambda(a_1,\ldots,a_m)$, множество определяющих слов которых после симметризации удовлетворяет условиям 3), 4) § 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ограничения на класс рассматриваемых групп типа условий 3) или 3'), 4) существенны. Действительно, рассмотрим группу

$$G_n = \langle a, b \mid a^{-1} b a = b^n \rangle$$

группа G_n является разрешимой (а, следовательно, и аменабельной) при любом натуральном n. Значит спектральный радиус простого блуждания на этой группе равен I, вопреки тому, что длина определяющего слова группы G_n неограничено растет с ростом n. Очевидно, что группа G_n не входит в рассматриваемый класс ни при каком n.

ГЛАВА 4

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ БАНАХОВОГО СРЕДНЕГО

§ 1. О гипотезе фон Неймана для однородных пространств

Пусть G – группа, действующая как группа преобразований на множестве S, так что $g_1 g_2(x) = g_1(g_2(x))$ и $e(x) = x$ (e – единица в G). Нас будет интересовать вопрос о существовании конечно-аддитивных G – инвариантных мер, $\mu : \Omega(S) \to [0, +\infty]$ ($\Omega(S)$ – алгебра всех подмножеств S), таких, что $\mu(A) = 1$ для некоторого непустого множества A. Мы будем говорить о таких мерах, как об инвариантных мерах для тройки (G, S, A).

Действие G на S называется свободным, если для всякого $s \in S$ из равенства $g(s) = s$ следует, что $g = e$. Определим ограниченное множество в S как множество, которое содержится в объединении конечного числа множеств вида gA. Положим $X = \{ f \in B(S) : supp(f)$ ограничен$\}$, где $B(S)$ – пространство ограниченных комплекснозначных функций на G, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$. Функционал m определенный на G – инвариантном подпространстве пространства $B(S)$ называется инвариантным если $m\{f(gx)\} = m\{f(x)\}$ для всех $g \in G, x \in S$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. [7]. Для того, чтобы существовала инвариантная мера для (G, S, A), необходимо и достаточно, чтобы существовал неотрицательный G – инвариантный функционал m на X – такой что $m\{\chi_A\} = 1$, (χ_A – характеристическая функция множества A).

Пусть G – действует на себе сдвигами (например левыми). Напомним, что если для системы (G, G, G) инвариантная мера существует, то группа G называется аменабельной, а соответствующий линейный функционал m называется левоинвариантным средним.

Простейшим примером неаменабельной группы служит свободная группа с двумя образующими. Фон Нейман высказал гипотезу: для того, чтобы счетная группа G была аменабельной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала свободную группу с двумя образующими.

В данной работе будет опровергнут вариант этой гипотезы: для системы (G, S, A) не существует инвариантной меры тогда и только тогда, когда группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, действующую на S свободно. Для $S = G$ эта гипотеза превращается в гипотезу фон Неймана.

Пусть группа G, действующая транзитивно на множестве S, порождена конечным числом образующих $a_1, \ldots, a_m$. Обозначим через $P(G)$ множество неотрицательных функций φ на G таких, что I) $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 1$, 2) $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$. По функции $\varphi \in P(G)$ построим марковскую цепь на множестве S следующим образом: вероятность перехода из элемента x в элемент gx за один шаг положим равной $\varphi(g)$. Самосопряженный оператор $T_\varphi : l_2(S) \to l_2(S)$, действующий по формуле

$$\left(T_\varphi f\right)(x) = \sum_{s\,t = x} f(s)\varphi(t) \qquad (\mathrm{I.I})$$

имеет спектр, лежащий на отрезке $[-1, 1]$, а его спектральный радиус $r(T_\varphi)$, как показано в [3], может быть вычислен по формуле

$$r(T_\varphi) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\{ P_{\xi\xi}^{(n)} \right\}^{\frac{1}{n}} \qquad (\mathrm{I.2})$$

где $P_{\xi\xi}^{(n)}$ — вероятность возвращения в точку ξ на n-ом шаге, ($r(T_\varphi)$ не зависит от выбора точки ξ). В дальнейшем нам потребуется следующий результат.

ТЕОРЕМА I.I. Если для системы (G, S, S) существует инвариантная мера, то для любой функции $\rho \in P(G)$

$$\tau(T_\varphi)=1$$

Обратно, если существует функция $\varphi\in\mathcal{P}(G)$ носитель которой порождает группу G и $\tau(T_\varphi)=1$, то для системы $(G,\mathcal{S},\mathcal{S})$ существует инвариантная мера.

Доказательство этой теоремы мы проводим следуя Кестену [2], рассмотревшему случай тройки (G,G,G). При этом мы основываемся на критерии типа условия Фелнера, существования инвариантной меры для тройки $(G,\mathcal{S},A)$ доказанном Розенблатом [18].

Пусть F_m - свободная группа ранга m, $a_1,\dots,a_m$ -множество её образующих.

ТЕОРЕМА I.2. (I) Для произвольной группы $H\subset F_m$ существует константа $C=C(H,\{a_i\})$ такая, что

$$|H_n|\leq C\alpha_H^n$$

(П) Пусть H^i - возрастающая последовательность подгрупп группы F_m. Тогда существует константа K такая, что

$$i=1,2,\dots,\ n=1,2,\dots \qquad |H_n^i|\leq K\alpha_{H^i}^n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W - слово в символах a_ν^ε, $\varepsilon=\pm1$. Через $\theta(W)$ обозначим слово, получающееся из слова W путем всех возможных сокращений в слове W, а через $\sigma(W)$ - слово, состоящее из первой и последней буквы слова W. Длину слова W мы обозначим $\partial(W)$. Если W и $\sigma(W)$ несократимые слова, то слово W называется циклически несократимым. Если существвет константа C такая, что

$$|H_n|\leq C\alpha^n$$

и $\alpha>1$, то для группы gHg^{-1}, где $g\in F_m$

$$|(gHg^{-1})_n|< C\frac{\alpha^{2\partial(g)+1}}{\alpha-1}\alpha^n$$

Действительно, если W - слово в a - символах, то

$$|\partial(W)-\partial(\theta(gWg^{-1}))|\leq 2\partial(g)$$

Так как отображение $h\to ghg^{-1}$ есть автоморфизм группы F_m, то

$$|(gHg^{-1})_n|\leq\sum_{i=0}^{n+2\partial(g)}|H_i|\leq C\sum_{i=0}^{n+2\partial(g)}\alpha^i<C\,\frac{\alpha^{2\partial(g)+1}}{\alpha-1}\,\alpha^n .$$

Следовательно, доказать первое утверждение теоремы I.2 для группы H все равно, что доказать это утверждение для группы gHg^{-1}, а доказать второе утверждение для последовательности вложенных групп H^i, все равно, что доказать это утверждение для последовательности групп gH^ig^{-1}.

Построим отображение

$$\varphi: H_n\times H_m\longrightarrow\bigcup_{i=-2M}^{2M}H_{n+m+i}$$

где M некоторое натуральное число, зависящее только от группы H. Предположим, что существуют два элемента U, V такие, что

а) U и V циклически несократимы,

б) слово U^ε, $\varepsilon=\pm1$ не есть конец или начало слова V^η, $\eta=\pm1$, слово V^ε, $\varepsilon=\pm1$ не есть конец или начало слова U^η, $\eta=\pm1$. Положим $M=max(\partial(U),\partial(V))$

Если $g\in H_n,\ f\in H_m$ и $\partial(g)+\partial(f)-\partial(gf)\leq 2M$, то

$$\varphi(g,f)=\theta(gf)\in\bigcup_{i=-2M}^{2M}H_{n+m+i}$$

При таком отображении, которое определено на части множества $H_n\times H_m$ в элемент h переходит не более, чем $2M(2m-1)^M$ элементов. Предположим, теперь, что $\partial(g)+\partial(f)-\partial(gf)>2M$.

Тогда, в одном из слов $gu^\varepsilon f,\ gv^\eta f,\ \varepsilon,\eta=\pm1$ после всех воз-

можных сокращений останется хотя бы один символ слова u^{ε} или v^{η}. Например, если в слове $\theta(gu^{\varepsilon}f)$ остался хотя бы один символ u^{ε}, положим $\varphi(g,f)=\theta(gu^{\varepsilon}f)$. Аналогично определим отображение φ на остальных парах (g,f).
Заметим, что при этом

$$\varphi(g,f)\in\bigcup_{i=-M}^{M} H_{n+m+i}$$

а в элемент h при отображении φ переходит не более чем $2M(2m-1)^{M}$ элементов. Из свойств построенного отображения вытекает, что

$$|H_n||H_m|\leq 4M(2m-1)^{M}\sum_{i=-M}^{M}|H_{n+m+i}|=N\sum_{i=-M}^{M}|H_{n+m+i}|$$

где $N=4M(2m-1)^{M}$. Предположим, что группа H не обладает свойствами а) и б). Тогда возможны следующие случаи.

I) Группа H порождена циклически несократимым словом W и некоторым непустым множеством $\{V_i\}$ циклически сократимых слов, причем у группы H существуют два циклически сократимых слова U_1 и U_2 такие, что $\sigma(U_1)\neq\sigma(U_2)$.

В случае I) отображение φ строится следующим образом. Пусть $g\in H_n$, $f\in H_m$, причем g и f циклически сократимы. Определим $\varphi(g,f)$ как

$$\varphi(g,f)=gU_if\in\bigcup_{i=0}^{M} H_{n+m+i}$$

где $M=max(\partial(U_1),\partial(U_2))$, а i подобрано таким образом, чтобы слово gU_if было несократимым. Если же хотя бы одно из слов g и f циклически несократимо, $\varphi(g,f)$ определим следующим образом

$$\varphi(g,f)=g^{\varepsilon}f^{\eta}$$

где числа $\varepsilon, \eta = \pm 1$ подобраны таким образом, чтобы слово $g^\varepsilon f^\eta$ было несократимым.

2) Группа H порождена циклически несократимым словом W и некоторым непустым множеством $\{v_i\}$ циклически сократимых слов, причем у группы H не существует двух циклически сократимых слов U_1 и U_2 таких, что $\sigma(U_1) \neq \sigma(U_2)$.

Будем считать, что множество $\{W, V_1, V_2, \ldots\}$ образующих группы H является нильсеновским. Отображение φ в этом случае строится следующим образом. Пусть $g \in H_n, f \in H_m$. Если g и f циклически сократимы, то в силу свойств нильсеновского множества образующих, при сокращении одного из слов $gWf, gW^{-1}f$ от W - слова останется хотя бы один символ, (разложение элементов g и f по нильсеновским образующим не может быть таким, чтобы разложение слова g кончалось на W^η, а разложение слова f начиналось на $W^{-\eta}$, $\eta = \pm 1$). $\varphi(g,f)$ определим как

$$\varphi(g,f) = gW^\varepsilon f \in \bigcup_{i=-\partial(W)}^{\partial(W)} H_{n+m+i}$$

где число $\varepsilon = \pm 1$ подобрано подходящим образом. Если же одно из слов g и f циклически сократимо, то как и в предыдущем случае, положим $\varphi(g,f) = g^\varepsilon f^\eta$, где числа $\varepsilon, \eta = \pm 1$ подобраны таким образом, чтобы слово $g^\varepsilon f^\eta$ было несократимым.

3) Все слова группы H циклически сократимы, но при этом есть два слова $W_1, W_2 \in H$ такие, что $\sigma(W_1) \neq \sigma(W_2)$.

Отображение φ строится следующим образом. Если $g \in H_n$, $f \in H_m$, то

$$\varphi(g,f) = gW_i f \in \bigcup_{i=0}^{M} H_{n+m+i}$$

где $M = \max(\partial(W_1), \partial(W_2))$, а $i = 1,2$ подобрано таким образом, чтобы слово $gW_i f$ было несократимым.

4) Группа H порождена несократимым словом W. Тогда H_n состоит не более чем из двух элементов и $\alpha_H = 1$.

5) Все элементы группы H циклически сократимы, но $\Gamma(W)$ одно и то же для всех $W \in H$.

Этот случай сводится к предыдущим переходом от группы H к группе gHg^{-1} где элемент $g \in F_m$ подобран таким образом, чтобы группа gHg^{-1} не удовлетворяла условию 5.

Итак, нами установлено, что для произвольной подгруппы H группы F_m существуют константы N, T, зависящие от группы H, такие, что

$$|H_n||H_m| \leq N \sum_{i=-T}^{T} |H_{n+m+i}|$$

Предположим теперь, что для всякого C существует n такое, что $|H_n| \geq C\alpha_H^n$. Тогда

$$N \sum_{i_1=-T}^{T} |H_{2n+i_1}| \geq |H_n|^2 \geq C^2 \alpha^{2n}$$

$$N^3 \sum_{i_1=-T}^{T} \sum_{i_2=-T}^{T} |H_{2(2n+i_1)+i_2}| \geq N^2 \sum_{i_1=-T}^{T} |H_{2n+i_1}|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2T} \left(N \sum_{i_1=-T}^{T} |H_{2n+i_1}| \right)^2 \geq \frac{C^4 \alpha^{4n}}{2T}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N^{2p+1} \sum_{i_1=-T}^{T} \sum_{i_2=-T}^{T} \cdots \sum_{i_p=-T}^{T} |H_{2(2\cdots(2n+i_1)+i_2)+\cdots+i_p}| \geq$$

$$\geq \frac{C^{2^p} \alpha^{2^p n}}{(2T)^{p-1}}$$