Следовательно

$$\alpha_H \geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} |H_m|^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \left[\max_i |H_i|\right]^{\frac{1}{m}} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{p\to\infty} \left[\frac{C^{2^p} \alpha^{2^p n}}{N^{2^{p+1}} (2T)^{2^{p-1}}}\right]^{\frac{1}{q}} = C^{\frac{1}{T+n}} \alpha^{\frac{T}{T+n}}$$

где $q = 2^p n + (2^{p-1} + \dots + 2)T$

Подставив в последнее выражение $C = \beta \alpha_H^T$, где $\beta > 1$, находим

$$\alpha_H > \beta^{\frac{1}{T+n}} \alpha_H$$

Полученное противоречие и доказывает первую часть теоремы I.2. Вторую часть теоремы I.2 после проведенных рассуждений доказать нетрудно. Итак, пусть задана возрастающая последовательность H^i подгрупп группы F_m, и $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H^i$. Существует номер n_0 такой, что все группы H^n при $n \geqslant n_0$ удовлетворяют одному и тому же из отмеченных ранее условий. Если это не третье условие, то для каждого n отображение φ_n можно построить таким образом, чтобы числа N_n, T_n были ограничены сверху некоторыми константами N и T, т.е.

$$|H_k^n||H_m^n| \leqslant N \sum_{i=-T}^{T} |H_{n+m+i}| \tag{I.3}$$

при $n \geqslant n_0$, а значит, в качестве "универсальной" константы можно взять $K = \beta(2m-1)^T$, где $\beta = 1$. Сложнее обстоит дело в том случае, когда все H^n при $n \geqslant n_0$ удовлетворяют условию 3). Дело в том, что если $H^n \subset H^{n+1}$, то нильсеновская система образующих группы H^n вообще говоря не вкладывается в нильсеновскую систему образующих группы H^{n+1}, а значит, длина циклически несократимого слова W_n из нильсеновской системы образующих группы H^n вообще говоря может неограничено расти. Покажем, что в нашей ситуации это невозможно. Действительно, пусть W_{n_0} и W_n – два циклически несократимых слова нильсеновских систем образующих групп H^{n_0} и H^n. Так как $H^{n_0} \subset H^n$, то элемент W_{n_0} можно разложить в произведение нильсеновских образующих группы H^n. Но это разложение должно начинаться или кончаться элементом $W_{n_0}^{\varepsilon}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ ибо в противном случае слово W_n оказалось бы циклически сократимым. Известно [17], что в этом случае не меньше половины слова W_n должно быть началом или концом слова W_{n_0}. Следовательно длина слова W_n не может неограниченно расти с ростом n, а значит, существуют универсальные константы N и T такие, что для группы H имеет место (I.3) при $n \geq n_0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть H^i – последовательность вложенных подгрупп группы F_m и $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H^i$. Тогда

$$\alpha_H = \lim_{i\to\infty} \alpha_{H^i}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой I.2. Так как

$$|H_n^i| \leq K \alpha_{H^i}^n$$

а H_n совпадает с H_n^i для достаточно больших номеров i, то

$$|H_n| \leq K \left[\lim_{i\to\infty} \alpha_{H^i}\right]^n$$

Следовательно $\alpha_H \leq \lim_{i\to\infty} \alpha_{H^i}$. Неравенство $\lim_{i\to\infty} \alpha_{H^i} \leq \alpha_H$ очевидно.

ТЕОРЕМА I.3. Существует подгруппа H свободной группы F_2, удовлетворяющая следующим условиям

I) $\alpha_H < 3$

2) для произвольного элемента $g \in F_2$ существует целое $l \neq 0$ и элемент $\sigma \in F_2$ такие, что $g^l \in \sigma H \sigma^{-1}$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы I.I и теоремы 3.I главы 2 следует, что для системы $(F_2, F_2/H, F_2/H)$ инвариантной меры не существует, в то время как у группы F_2 нет подгруппы действующей на F_2/H свободно, так как из 2) следует, что $g^l(\Gamma) \in \Gamma H$, $g^l(\Gamma H) = \Gamma H$ а значит ΓH – неподвижная точка для элемента g^l.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим возрастающую последовательность подгрупп группы F_2 следующим образом:

1. H^1 определим как группу порожденную элементами a_1^2, a_2^2 где a_1, a_2 – свободные образующие группы F_2.

Нетрудно видеть, что $\alpha_{H^1} = \sqrt{3}$.

2. Из группы F_2 выбросим все элементы вида a_1^k, a_2^m, $k,m = 0, \pm 1, \ldots$ а также все циклически сократимые элементы. Перенумеруем элементы полученного множества E^1 в произвольном порядке.

3. Определим группу H^2 как группу порожденную группой H^1 и элементом $g_1^{t_1}$, где g_1 – первый элемент множества E^1, а его степень t_1 подобрана таким образом, чтобы

$$\alpha_{H^2} - \alpha_{H^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(Тот факт, что такое t_1 существует будет доказан ниже).

4. Из множества E^1 выбросим элементы вида g_1^m, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и на полученное множество E^2 индуцируем порядок множества E^1.

5. Если группа H^n и множество E^n определены, то группу H^{n+1} определим как группу порожденную группой H^n и элементом $g_n^{t_n}$, где g_n – первый элемент множества E^n, а его степень t_n подобрана таким образом, чтобы

$$\alpha_{H^{n+1}} - \alpha_{H^n} < \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (1.4)$$

(Тот факт, что такое t_n существует будет доказан ниже). Из полученного множества E^n выбросим элементы вида g_n^m и на полученное множество E^{n+1} индуцируем порядок множества E^n.

Группу H определим следующим образом

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H^n$$

В силу следствия из теоремы I.2

$$\alpha_H = \lim_{n\to\infty} \alpha_{H^n} \le \alpha_{H^1} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots = \sqrt{3} + \varepsilon$$

Если выбрать ε достаточно малым, то получим, что группа H удовлетворяет условиям I) и 2). Осталось доказать, что действительно на каждом шаге построения последовательности групп H^n степень элемента g_n можно подобрать таким образом, чтобы имело место (I.4). С этой целью докажем несколько лемм.

ЛЕММА I.I. Пусть H – конечно порожденная группа, $H \subset F_m$, $W_1, W_2 \in H$, а элемент $g \in H$ циклически несократим и никакая его степень не принадлежит классу групп, сопряженных с H в группе F_m. Тогда существует константа C (C не зависит от W_1, W_2, g) такая, что в словах $W_1 g^l$, $g^k W_2$ сокращение может происходить на отрезок длины не более C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма не верна. Тогда существуют последовательности элементов $V_1, V_2, \dots$ группы H и целых чисел $k_1, k_2, \dots$ такие, что в словах вида $V_p g^{l_p}$ сокращение может происходить на отрезок сколь угодно большой длины. Пусть $x_1, \dots, x_m$ – свободные образующие группы F_m, а $f_1, \dots, f_s$ – нильсеновская система образующих группы H. Элементы V_p можно представить в виде несократимых слов как в x – символах, так и в f – символах. Пусть

$$V_p = x_{p1} \cdots x_{p\nu}$$

$$V_p = f_{p1} \cdots f_{pr}$$

Предположим, что при полном сокращении слова $V_p g^{k_p}$ у V_p "поглощается" подслово

$$u_p = x_{p_i} x_{p_{i+1}} \cdots x_{p\nu}$$

С ростом числа p длины слов u_p неограничено возрастают. Слово u_p можно представить в следующем виде

$$u_\rho = x_{\rho_i} x_{\rho_{i+1}} \dots x_{\rho_\nu} = \alpha_\rho f_{\rho_j} \dots f_{\rho_r}$$

где длина элемента α_ρ не превосходит $\max\limits_i \partial(f_i)$. Допустим, что при сокращении слова $V_\rho g^{\kappa_\rho}$ у множителя g^{κ_ρ} "поглощается" слово $g^{\nu_\rho}\sigma_\rho$, где σ_ρ есть начало слова g. По предположению, с ростом числа ρ неограниченно растут числа ν_ρ. Так как длины слов α_ρ и σ_ρ, $\rho = 1, 2, \dots$ ограничены сверху константой $L = \max(\partial(f_1), \dots, \partial(f_s), \partial(g))$, то для двух различных значений индекса ρ (эти значения мы обозначим индексами ξ, η) пары (α_ξ, σ_ξ) и $(\alpha_\eta, \sigma_\eta)$ совпадут). Тогда

$$\alpha_\xi f_{\xi_j} \dots f_{\xi_r} = (g^{\nu_\xi}\sigma_\xi)^{-1}$$

$$\alpha_\eta f_{\eta_j} \dots f_{\eta_r} = (g^{\nu_\eta}\sigma_\eta)^{-1}$$

причем $\nu_\xi \neq \nu_\eta$, $\alpha_\xi = \alpha_\eta = \alpha$, $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma$. Следовательно

$$g^{\nu_\eta - \nu_\xi} \in \sigma H \sigma^{-1}$$

вопреки предположению. Случай произведений вида $g^\kappa W_2$ инверсией сводится к рассмотренному. Заметим, что по ходу доказательства мы установили, что в качестве константы C можно взять L^2. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы F_m, $g \in F_m$, $u \in H$, элемент g удовлетворяет условию предыдущей леммы и, кроме того, никакая степень (отличная от 0) элемента g не есть степень более короткого элемента. Тогда слово вида

$$g^{\varepsilon_1 l} u g^{\varepsilon_2 l} \tag{1.5}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$ может сокращаться на отрезок длины, не превосходящий числа $2(\partial^2(g) + \partial(g) + c)$ (где константа c та же, что и в предыдущей лемме).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если при полном сокращении слова (1.5) от элемента u останется хотя бы один символ, то слово (I.5) сокращается на отрезок длины не превосходящий числа $2c$. Предположим теперь, что при сокращении слова (I.5) элемент u полностью сократился. Возникает вопрос: на кусок какой длины может сократиться произведение вида $V_1 V_2$, где V_1 - некоторое начало слова $g^{\varepsilon_1 l}$, а V_2 - некоторый конец слова $g^{\varepsilon_2 l}$. Рассмотрим случай, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Пусть для определенности $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Слова V_1 и V_2 можно записать следующим образом:

$$V_1 = g \cdots g g \sigma_1$$

$$V_2 = \sigma_2 g g \cdots g$$

где σ_1 и σ_2 соответственно начало и конец слова g и $\sigma_1 \neq \sigma_2^{-1}$ Предположим, что при сокращении слова $V_1 V_2$, слово σ_1 полностью сокращается с частью слова σ_2. Пусть при этом от σ_2 остается конец Δ. Тогда (если предположить, что слово $V_1 V_2$ сокращается на отрезок длины большей чем $max(\partial(\sigma_1), \partial(\sigma_2))$) последний x - символ слова g должен быть обратным к первому символу слова Δ, предпоследний символ слова g должен быть обратным ко второму символу слова Δ и т.д. Так как слово Δ должно полностью сократиться, а Δ есть конец слова g, то Δ свободно равно пустому слову (т.е. операциями сокращений Δ приводится к пустому слову). Мы пришли к противоречию, так как с самого начала условились рассматривать несократимые слова.

Предположим теперь, что $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$: другими словами V_1 - есть начало слова g^l, а V_2 есть конец слова g^{-l}. Слова V_1, V_2 запишем следующим образом:

$$V_1 = g g \cdots g \sigma^{-1}$$

$$V_2 = \sigma_2 g^{-1} \cdots g^{-1}$$

где σ_1 - начало слова g, а σ_2 - конец слова g^{-1}. Можно считать, что σ_1 и σ_2 одновременно не равны пустому слову, а также что $\sigma_1 \neq \sigma_2^{-1}$. В противном случае не выполняется одно из условий леммы. Предположим, что сокращение слова $V_1 V_2$ происходит на отрезок длины больший чем число $2(\partial^2(g)+\partial(g))$. Тогда при сокращении слова $V_1 V_2$ слова σ_1 и σ_2 полностью поглощаются. Предположим, для определенности, что $\partial(\sigma_1)<\partial(\sigma_2)$ Через Δ обозначим часть слова σ_2, которая останется после сокращения слова $\sigma_1\sigma_2$. Последний символ слова g должен быть обратным к первому символу слова Δ, предпоследний символ слова g должент быть обратным ко второму символу слова Δ и т.д. Так как Δ - конец слова g^{-1}, то Δ^{-1} - начало слова g. Следовательно в слове g можно выделить начало и конец, которые совпадают и равны слову Δ^{-1}. Пусть при сокращении слова g со словом Δ от слова g сохранилось начало $g^{(1)}$. Так как последний символ слова $g^{(1)}$ есть обратный первому символу слова g^{-1}, предпоследний символ слова $g^{(1)}$ есть обратный второму символу слова g^{-1} и т.д., то слово $g^{(1)}$ оканчивается словом Δ^{-1}. Отбросив от слова $g^{(1)}$ конец Δ^{-1} получим слово $g^{(2)}$, к которому применим предыдущие рассуждения. Указанную процедуру продолжим до тех пор, пока x - длина соответствующего остатка не станет меньше x - длины слова Δ^{-1}. Если Δ^{-1} вкладывается в g целое число раз, то это противоречит тому, что g не есть степень другого элемента. Следовательно, можно считать, что этот остаток не пуст. Так как мы предположили, что сокращение слова $V_1 V_2$ происходит на отрезок длины больший чем $2(\partial^2(g)+\partial(g))$, то применяя к слову $g\,g^{(k)}$ предыдущие рассуждения получим, что и оно должно оканчиваться словом Δ^{-1} и т.д. Итак слово $V_1\sigma_1^{-1}=g^{\xi}$ устроено таким образом, что оно оканчивается на некоторую степень слова Δ^{-1}, причем длина этого конца не меньше чем $\partial^2(g)+\partial(g)$ Это значит, что конец $g^{\partial(\Delta^{-1})}$ слова $V_1\sigma_1^{-1}$ можно представить в виде

$$g^{\partial(\Delta^{-1})} = (\Delta^{-1})^{\partial(g)}$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА I.3. Пусть $H \subset F_2$, $g \in H$ и g обладает следующим свойством: сокращение произвольного слова вида $W_1 g^l W_2$ происходит на отрезок длины, не превосходящий фиксированного числа T (W_1 , $W_2 \in H$, l – отличное от нуля целое число). Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует неотрицательное l такое, что если H^1 есть группа, порожденная группой H и элементом g^l, то $\alpha_{H^1} - \alpha_{H^1} < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in H^1$ и

$$h = u_1 g^{l r_1} u_2 g^{l r_2} \dots g^{l r_p} u_{p+1} \tag{I.6}$$

где $u_i \in H$ несократимые слова и все u_i отличны от пустого слова, за исключением быть может слов u_i и u_{p+1} . Пусть H_m^1 – множество всех слов длины m в группе H^1 , Ω_m^k – множество слов вида (I.6) у которых сумма длин входящих в разложение (I.6) слов u_i равна m , а сумма модулей чисел r_j , $j = 1, \dots, p$ равна k , $\Omega_m = \bigcup_{i=0}^{m} \Omega_{m-i}^i$, $f_s = |H_s|$. Если $f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s x^s$, то радиус сходимости ряда f есть величина обратная к показателю роста группы H . Производящая функция $u_p(x)$ длин слов вида $u = u_1 u_2 \dots u_p$, где $u_i \in H$, $u_i \neq \emptyset$ для $i = 2, \dots, p-1$, связана с функцией $f(x)$ следующим образом

$$u_p(x) = f^{p-2}(x)[1+f(x)]^2$$

Множитель $[1+f(x)]^2$ появился из-за того, что u_1 и u_p могут быть равными пустому слову. Из теоремы I.2 следует, что существуют константа C, $(C>1)$ такая, что

$$f_n = |H_n| \leq C\alpha_H^n$$

Следовательно, если $u_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{p,n} x^n$, то

$$u_{p,n} = \sum_{\Sigma i_j = n} \tilde{f}_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_{p-1}} \tilde{f}_{i_p} \leq C^p \alpha_H^n \binom{n+p-1}{n}$$

где $f_{i_2}, \ldots, f_{i_{p-1}}$ – суть коэффициенты ряда $f(x)$, а $\tilde{f}_{i_1}, \tilde{f}_{i_2}$ – коэффициенты ряда $1+f(x)$. Пусть $l_1 = \partial(g)$. Тогда

$$|\Omega_m| = \sum_{i=0}^{m} |\Omega_{m-i}^i| \leq \sum_{K=0}^{m/ll_1} \sum_{p=0}^{m/ll_1+1} u_{p,m-ll_1K} \binom{K+p-1}{K} \leq$$

$$\leq \left[\frac{m}{ll_1}+2\right]^2 C^{\frac{m}{ll_1}} \binom{m+\frac{m}{ll_1}}{m} \binom{\frac{2m}{ll_1}}{\frac{m}{ll_1}} \alpha_H^m$$

Так как при сокращении слов вида (I.6) у множителя g^l "поглощается" начало и конец суммарной длины не превосходящей числа T, то

$$|H_m| \leq \bigcup_{j=m}^{m+\frac{m}{ll_1}T} |\Omega_j| \leq \frac{m}{ll_1} T \max_{1\leq j \leq m+\frac{mT}{ll_1}} |\Omega_j| \leq$$

$$\leq \left[\frac{m}{ll_1}+2\right]^3 T C^{\frac{m}{ll_1}} \binom{m+\frac{m}{ll_1}}{m} \binom{\frac{2m}{ll_1}}{\frac{m}{ll_1}} \alpha_H^m = \left[1+\delta\left(\frac{1}{l}\right)\right]^m \alpha_H^m$$

где $\delta\left(\frac{1}{l}\right) \to 0$ при $l \to \infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I.3 теперь следует из лемм I.I, I.2, I.3.

§ 2. Инвариантные меры и степень роста

Аменабельность группы G вместе с простыми ограничениями на действие группы G или на множество S влекут за собой существование инвариантной меры для (G, S, A). Не ясно в какой степени аменабельность является необходимой для существования таких мер. В частности, пусть G не является аменабельной, но действует на S некоторым разумным образом. Может ли существовать инвариантная мера для (G, S, A) ? Некоторым результатом в этом направлении есть

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть конечно порожденная группа G обладает конечным множеством E образующих элементов таким, что $E = E^{-1}$, $e \in E$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |E^n(x_0) \cap A|^{\frac{1}{n}} = 1$$

где $E^n = \{f_1, \dots, f_n : f_i \in E\}$. Тогда для системы (G, S, A) существует инвариантная мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и конечного множества $F \subset G$ существует конечное множество $K \subset S$ такое, что для всякого $f \in F$

$$\frac{|(fK \Delta K) \cap A|}{|K \cap A|} < \varepsilon$$

(такое множество называется фелнеровским). Отсюда будет следовать (см. [18]), что для системы (G, S, A) существует инвариантная мера. Пусть F произвольное конечное множество. Существует такое N, что $F \subset E^N$. Поэтому достаточно доказать существование фелнеровского множества K для конечного множества E^N. Положим $K_n = E^{nN}(x_0) \subset S$. Так как

$$1 \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|E^{2nN}(x_0) \cap A|}{|E^{nN}(x_0) \cap A|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} |E^{2nN}(x_0) \cap A|^{\frac{1}{n}} = 1$$

то

$$1 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|E^{2nN}(x_0) \cap A|}{|E^{nN}(x_0) \cap A|}$$

и, следовательно, существует последовательность n_K такая, что

$$\lim_{K\to\infty} \frac{|E^{2n_K N}(x_0) \cap A|}{|E^{n_K N}(x_0) \cap A|} = 1$$

Имеем

$$1+\frac{|(E^{(n_k+2)N}(x_0)\setminus E^{n_kN}(x_0))\cap A|}{|E^{n_kN}(x_0)\cap A|}=\frac{|E^{(n_k+2)N}(x_0)\cap A|}{|E^{n_kN}(x_0)\cap A|}$$

Следовательно

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|(E^{(n_k+2)N}(x_0)\setminus E^{n_kN}(x_0))\cap A|}{|E^{n_kN}(x_0)\cap A|}=0$$

Воспользовавшись, наконец, тем, что

$$\frac{|(E^{(n_k+1)N}(x_0)\Delta fE^{(n_k+1)}|}{|E^{(n_k+1)N}(x_0)\cap A|}=$$

$$=\frac{|(E^{(n_k+1)N}(x_0)\setminus fE^{(n_k+1)N}(x_0))\cap A|+|(fE^{(n_k+1)N}(x_0)\setminus E^{(n_k+1)N}(x_0))\cap A|}{|E^{(n_k+1)N}(x_0)\cap A|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|(E^{(n_k+2)N}(x_0)\setminus E^{n_kN}(x_0))\cap A|}{|E^{n_kN}(x_0)\cap A|}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

получаем, что существует такое $k=k(\varepsilon)$, что для всякого $f\in E^N$ имеет место

$$\frac{|(fE^{(n_k+1)}(x_0)\Delta E^{(n_k+1)N}(x_0))\cap A|}{|E^{(n_k+1)N}(x_0)\cap A|}<\varepsilon$$

Теорема доказана.

С помощью теоремы 2.I можно построить нетривиальные примеры систем (G, S, A) для которых инвариантная мера существует, а группа G не является аменабельной. Мы считаем пример такой системы нетривиальным, если действие группы G имеет "тривиальное" ядро, т.е. единственным элементом $g\in G$ таким, что $g(x)=x$ для всех $x\in S$ является единица группы G.

Пусть $S=\mathbb{R}_2\times\mathbb{Z}$ ($\mathbb{R}_2$ – множество двоично рациональных чисел), $G\simeq F_2$ – свободная группа с двумя образующими a, b,

$\{l_i\}$ – возрастающая последовательность целых чисел. Определим действие группы F_2 на S следующим образом: если $x=(r,m)\in S$ и $l_i \le m < l_{i+1}$, то

$$a(x)=(r,m+1)$$
$$a^{-1}(x)=(r,m-1)$$
$$b(x)=(r+2^i,m)$$
$$b^{-1}(x)=(r-2^i,m)$$

$i=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Пусть $N(n)=1+\max\limits_{i:|l_i|\le n}|i|$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=0 \tag{2.1}$$

то у системы $(F_2,R_2\times\mathbb{Z},A)$ существует инвариантная мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения

$$\|x\|=\min_{g:g(0)=x}\partial(g) \qquad (x\in S)$$
$$\gamma^s(n)=\#\{x=(r,m)\in S:\|x\|=n,\ m=s\}$$
$$\gamma(n)=\#\{x\in S:\|x\|=n\}$$

Пусть также $\beta^k(n)$ обозначает число различных двоично рациональных чисел представимых в виде

$$\pm2^{-i_1}\pm2^{-i_2}\pm\ldots\pm2^{-i_k} \tag{2.2}$$

где $|i_1|\le N(n),\ldots,|i_k|\le N(n),\quad 1\le k\le n$

Заметим, что $\beta^1(n)=2N(n)$. Число p назовем рангом числа $\alpha=n+n_1 2^{-1}+\ldots+n_p 2^{-p}$, где $n_1,\ldots,n_p$ – целые числа и $n_p\ne0$. Числа вида (2.2) лежат на отрезке $[-k2^{N(n)},k2^{N(n)}]$, причем каждое двоично рациональное число ранга не выше $N(n)$ отрезка $[0,1]$ можно представить как сумму вида (2.2). Таких чисел $2^{N(n)}+1$. Так как все числа вида (2.2) имеют ранг не выше $N(n)$ и лежат на отрезке $[-k2^{N(n)},k2^{N(n)}]$, то

$$\beta^{K}(n) \leq 2K\, 2^{N(n)} \left(2^{N(n)}+1\right)$$

Заметим, что все точки $x \in S'$ такие, что $\|x\| \leq n$ и $x \in \mathbb{R}_2 \times (s)$ где $s \in \mathbb{Z}$, $|s| \leq n$, принадлежат множеству точек представимых в следующем виде

$$\left(\pm 2^{-i_1} \pm \cdots \pm 2^{-i_n}, s\right)$$

где $|i_1| \leq K, \ldots, |i_n| \leq K$

$$K = \max\left[N\left(\tfrac{n+s}{2}\right), N\left(\tfrac{n-s}{2}\right)\right]$$

Следовательно

$$\gamma^{s}(n) \leq \beta^{n}\left(\max\left[\tfrac{n+s}{2}, \tfrac{n-s}{2}\right]\right)$$

Итак нами установлено, что

$$\gamma(n) = \sum_{s=-n}^{n} \gamma^{s}(n) \leq (2n)^2\, 2^{N(n)} \left(2^{N(n)}+1\right)$$

а, значит, в качестве множества E фигурирующего в теореме 2.I можно взять множество $\{e, a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ так как $|E^{n}(0)| \leq \gamma(n)$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |E^{n}(0)|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \gamma(n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Предложение доказано.

Найдем ядро H действия группы F_2. Пусть $W(a,b) \in H$ где $W(a,b) = y_1 \cdots y_n$ — несократимое слово в символах a, b, a^{-1}, b^{-1} $\partial(W) = n$. Условимся через $\partial_a(W)$ $(\partial_b(W))$ обозначать сумму показателей степеней при a (b) в слове V, а через $\partial_b^{K}(V)$ обозначать сумму показателей степеней при тех b, для которых сумма показателей степеней при символах a предшествующих данному символу „b" в слове $W(a,b)$ равна K. Из (2.I) следует, что $\overline{\lim_{i\to\infty}}(l_i - l_{i-1})$. Выберем i таким образом, чтобы $l_i - l_{i-1} > 2(n+1)$. Рассмотрим последовательность слов $V_1 = y_1$, $V_2 = y_1 y_2, \ldots, V_n = y_1 y_2 \cdots y_n$. Пусть

$$\xi = \max_{1\le j\le n} \partial_a(V_j), \quad \xi_1 = \min_{1\le j\le n} \partial_a(V_j)$$

Построим $\xi-\xi_1+1$ путей $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\xi-\xi_1}$, где путь γ_j последовательно проходит точки $\omega_j = (l_i - \xi + j - 1, 0)$, $V_1(W_j), V_2(W_j) \dots \dots V_n(W_j)$.

Так как мы предположили, что элемент $W = V_n$ принадлежит ядру действия группы F_2, то пути $\gamma_0, \dots, \gamma_{\xi-\xi_1}$ замкнуты.

Путь γ_0 полностью лежит в полосе $\Gamma_i = \{(\alpha,\beta : l_{i-1} \le \alpha < l_i\}$. Так как перемещения при действии элементов b, b^{-1} на точки из этой полосы происходят на $\pm 2^i$, то условие его замкнутости можно выразить следующим образом:

$$\partial_a(W) = 0, \quad \partial_b(W) = 0$$

Путь γ_1 уже не лежит полностью в полосе Γ_i : ряд его вершин находится в полосе Γ_{i+1}, в которой перемещения под действием элементов b, b^{-1} происходят по вертикали на $\pm 2^{i+1}$. Следовательно, чтобы путь γ_1 был замкнут, необходимо чтобы при последовательном прохождении вершин пути γ_1 количество перемещений по вертикали на $+2^{i+1}$ равнялось количеству перемещений на -2^{i+1}. Это условие можно записать следующим образом

$$\partial_b^{\xi}(W) = 0$$

Из ~~аналогичных соображений~~ находим, что

$$\partial_b^{\xi-1}(W) = 0, \dots, \partial_b^{\xi_1}(W) = 0$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Группа $G^* \simeq F_m/H$ содержит свободную подгруппу с двумя образующими и, следовательно, не является аменабельной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что элементы $c = a^2 b a^{-2} b^{-1}$ и $d = a b a^{-1} b^{-1}$ порождают свободную подгруппу в G^*. Для этого достаточно доказать, что если $W(c,d)$ – непустое несократимое слово в символах c, d, c^{-1}, d^{-1}, то $W(c,d) \ne e$ в группе G^*.

Но какое бы ни было W $\partial_b^2(\widetilde{W})>0$, где $\widetilde{W}=W(a^2ba^{-2}b^{-1}, aba^{-1}b^{-1})$. Следовательно, $\widetilde{W}\in H$, а значит $W(c,d)\neq e$ в G^*. Предложение доказано.

Переходя к индуцированному действию группы $G^*\simeq F_2/H$ на множестве $S=R_2\times\mathbb{Z}$ мы получаем пример транзитивного действия неаменабельной группы на счетном множестве S обладающего тривиальным ядром и такого, что для любого $A\subset S$ система (G,S,A) имеет инвариантную меру.

§ 3. Конструкция аменабельных полугрупп.

Фиксируем конечный алфавит $A=\{a_i\}_1^r$ и обозначим через $\mathcal{F}_A$ свободную полугруппу с единицей e, порожденную множеством A.

Говорят, что отношение эквивалентности ρ на полугруппе S стабильно справа (слева), если $a\rho b$ $(a,b\in S)$ влечет за собой $ac\rho bc$ $(ca\rho cb)$ для каждого $c\in S$. Стабильное справа (слева) отношение эквивалентности называется правой (левой) конгруэнцией на S. Конгруэнцией на S называется отношение эквивалентности, являющееся и правой и левой конгруэнцией.

Пусть $K=(W_j)$ есть конечный или счетный набор слов в алфавите A, удовлетворяющий двум условиям

1) никакое слово из K не есть часть другого

2) начало любого слова не есть конец другого.

Обозначим через ρ конгруэнцию на $\mathcal{F}_A$ порожденную отношением эквивалентности $\rho_0=\{(W_i,e)\}$, а также условием: из $ac\rho bc\Rightarrow a\rho b$ (закон правого сокращения). Пусть $\mathcal{C}_K\simeq\mathcal{F}_A/\rho$

Вставкой слова U в слово V называется слово V_1UV_2 где V_1 и V_2 непустые слова и $V_1V_2=V$. Обозначим через $\mathcal{E}(K)$ — результат замыкания кода K относительно операций умножения слов и вставок. Очевидно, что множество $e\cup\mathcal{E}(K)$ содержится в классе эквивалентности слов сравнимых с e по $mod\, \varrho$.

Пусть μ — распределение на A. Если $W_j = a_{j_1} \dots a_{j_n}$, то через $\mu(W_j)$ условимся обозначать произведение $\mu_{j_1} \dots \mu_{j_n}$ где $\mu_i = \mu(a_i)$.

ТЕОРЕМА 3.I. Если существует распределение μ на A такое, что ряд

$$1 - t + \sum_j \mu(W_j) t^{\partial(W_j)} \qquad (3.I)$$

имеет кратный положительный корень в круге сходимости, то полугруппа S_K обладает правоинвариантным банаховым средним.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим множеству слов K ряд

$$\phi_K(x_1, \dots, x_n) = 1 + \sum C_{i_1 \dots i_r} x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r}$$

где $C_{i_1 \dots i_r}$ — число слов $W \in \mathcal{E}(K)$ таких, что число $\partial_1(W)$ вхождений символа a_1 в слово W равно $i_1, \dots$, число $\partial_r(W)$ вхождений символа a_r в слово W равно i_r.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Функция $\phi_K(x_1, \dots, x_r)$ удовлетворяет уравнению

$$1 - \phi_K(x_1, \dots, x_r) + \sum x_1^{j_1} \dots x_r^{j_r} \phi_K^{j_1 + \dots + j_r} = 0 \qquad (3.2)$$

где суммирование ведется по таким наборам $j_1, \dots, j_r$, что $j_1 = \partial_1(W), \dots, j_r = \partial_r(W)$, $W \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Пусть $K = \{W_1, W_2, \dots\}$, причем $\partial(W_1) \leq \partial(W_2) \leq \dots$. Построим по произвольному слову $V \in \mathcal{E}(K)$ блочное дерево $\mathcal{G}_V$, вершины которого могут принадлежать к одному из $|K|$ типов (заметим, что в том случае когда код K бесконечен $|K| = \infty$) и в зависимости от типа имеют вид

1. отрезка деленного на $\partial(W_1)$ равных частей
2. отрезка деленного на $\partial(W_2)$ равных частей

....

Через $\Gamma(v)$ обозначим тип вершины v. Дерево $\mathcal{Y}_V$ определим следующим образом. У непустого слова $V \in \mathcal{E}(K)$ есть хотя бы одно подслово S такое, что $S = W_{i(S)}$ для некоторого индекса $i(S)$. Если таких слов несколько, то выберем из них то, вхождение которого в V расположено левее остальных. Вычеркнем из слова V слово S и полученное слово обозначим через V_1. Введем в рассмотрение вершину u, где $\Gamma(u) = i(S)$. Поступим со словом V_1 так же, как со словом V: выделим подслово S_1 такое, что $S_1 = W_{i(S_1)}$, введем вершину v, где $\Gamma(v) = i(S_1)$ и, наконец, построим слово V_2. Если слово S входило в слово S_1 в слове V и если при этом j_1 символов слова S_1 были расположены левее слова S, то вершины u и v соединяем ребром (j_1, v, u). В противном случае новых ребер не вводим и считаем, что $u < v$ если слово S входит в слово V левее слова S_1 и $u > v$ в противном случае. Со словом V_2 поступим аналогичным образом: выделим подслово S_2 такое, что $S_2 = W_{i(S_2)}$. Введем вершину h, где $\Gamma(h) = i(S_2)$ и, наконец, построим слово V_3. Если слово S_1 входило в слово S_2 в слове V_1, то вершины v и h соединяем ребром (j_2, v, u), где j_2 – количество символов слова S_2, расположенные левее слова S_1 в слове V_1. Если слово S_1 не входило в слово S_2 в V, а слово S входило в слово S_2 в V, то вершины u и h соединяем ребром (j_3, h, u), где j_3 – количество символов слова S_2, расположенных левее слова S в слове V. В противном случае новых ребер не вводится, а полученное множество вершин упорядочивается как и в случае пары u, v. Продолжим построение дерева $\mathcal{Y}_V$ до тех пор, пока на некотором шаге не придем к пустому слову. Описанная процедура однозначно определяет дерево $\mathcal{Y}_V$. Пустому слову условимся сопоставлять пустое дерево. Заметим, что так как множество K удовлетворяет условиям I),2), то соответствие $V \to \mathcal{Y}_V$, где $V \in e \cup \mathcal{E}(K)$ взаимно-однозначно.

Обозначим через Δ_K объединение всех деревьев $\mathcal{Y}_V$ по $V \in e \cup \mathcal{E}(K)$. Как и в главе 3 для объектов из Δ_K определим понятия уровней и их сечений.

Пусть u - вершина дерева $\mathcal{Y}_V$ и $\sigma(u)=i$. Функция $\eta(u) = y_i^{\partial(W_i)}$ называется весом вершины u. Весом $\eta(\mathcal{Y}_V)$ дерева $\mathcal{Y}_V$ называется выражение $\eta(u_1)\cdots\eta(u_p)$, где $u_1,\dots,u_p$ - вершины дерева $\mathcal{Y}_V$, выписанные в произвольном порядке (предполагается, что веса отделеных вершин коммутируют между собой).

ЛЕММА 3.I. Пусть $\Gamma(y_1^{\partial(W_1)},\dots,y_i^{\partial(W_i)},\dots)$ - перечисляющий ряд для весов сечений первого уровня. Тогда

$$\Gamma(y_1^{\partial(W_1)},\dots,y_i^{\partial(W_i)},\dots) = \frac{1}{1-(y_1^{\partial(W_1)}+\dots+y_i^{\partial(W_i)}+\dots)} \tag{3.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Перечисляющий ряд для весов сечений первого уровня, состоящих из n вершин равен

$$(y_1^{\partial(W_1)}+\dots+y_i^{\partial(W_i)}+\dots)^n$$

Следовательно

$$\Gamma(y_1^{\partial(W_1)},\dots,y_i^{\partial(W_i)},\dots) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(y_1^{\partial(W_1)}+\dots+y_i^{\partial(W_i)}+\dots)^n =$$

$$= \frac{1}{1-(y_1^{\partial(W_1)}+\dots+y_i^{\partial(W_i)}+\dots)}$$

Лемма доказана.

Определим последовательность рядов $\phi_n(y_1^{\partial(W_1)},\dots,y_i^{\partial(W_i)},\dots)$ следующим образом: $\phi_0=1$

$$\phi_{n+1} = \Gamma(y_1^{\partial(W_1)}\phi_n^{\partial(W_1)+1},\dots,y_i^{\partial(W_i)}\phi_n^{\partial(W_i)+1},\dots) \tag{3.4}$$

Очевидно, что коэффициенты при переменных $y_1, \dots, y_i$ в степенных рядах ϕ_n стабилизируются с ростом n. Это означает, что если $C^n_{t_1,\dots,t_i,\dots}$ коэффициент степенного ряда $\phi_n(y_1^{\partial(W_1)}, \dots, y_i^{\partial(W_i)}, \dots)$ при весе $y_1^{\partial(W_1)t_1} \dots y_i^{\partial(W_i)t_i}$, то существует такое L, что все $C^n_{t_1,\dots,t_i,\dots}$ равны при $n \geq L$. Обозначим через $\tilde{\phi}$ ряд

$$\tilde{\phi}(y_1, \dots, y_i, \dots) = 1 + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}(K)} \eta(\mathcal{Y}_\gamma)$$

Ряды $\phi_K(x_1, \dots, x_r)$ и $\tilde{\phi}(y_1, \dots, y_i, \dots)$ связаны соотношением

$$\phi(x_1, \dots, x_r) = \tilde{\phi}(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots) \tag{3.5}$$

где $\xi_i = x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r}$, $i_1 = \partial_1(W_i), \dots, i_r = \partial_r(W_i)$

ЛЕММА 3.2. $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{\phi}$, причем сходимость понимается в указанном выше смысле стабилизации коэффициентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечисляющий ряд ϕ_1 весов сечений первого уровня равен $\Gamma(y_1^{\partial(W_1)}, \dots, y_i^{\partial(W_i)}, \dots)$. Пусть $u \in \mathcal{Y}_\gamma$, $\Gamma(u) = i$ и u – вершина принадлежащая сечению первого уровня дерева $\mathcal{Y}_\gamma$. От $\partial(W_i) - 1$ точки деления вершины u на $\partial(W_i)$ равные части дерево может быть продолжено, причем перечисляющий ряд весов всех возможных продолжений на один уровень равен $\Gamma(y_1^{\partial(W_1)}, \dots, y_i^{\partial(W_i)}, \dots)$. Поэтому перечисляющий ряд весов сечений второго уровня получается подстановкой в ряд ϕ_1 выражения $y_1^{\partial(W_1)}\Gamma^{\partial(W_1)-1}$ вместо $y_1^{\partial(W_1)}, \dots,$ – выражения $y_i^{\partial(W_i)}\Gamma^{\partial(W_i)-1}$ вместо $y_i^{\partial(W_i)}, \dots$, т.е. совпадает с рядом ϕ_2. Аналогично доказывается, что перечисляющий ряд весов сечений n-го уровня равен ϕ_n. Так как произвольное дерево $\mathcal{Y}_\gamma$ имеет конечный уровень, то $\tilde{\phi} = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n$ ч.т.д.

ЛЕММА 3.3. Ряд $\tilde{\phi}$ является решением уравнения

$$\tilde{\phi}(y_1^{\partial(W_1)}, \dots, y_i^{\partial(W_i)}, \dots) = \frac{1}{1 - y_1^{\partial(W_1)}\tilde{\phi}^{\partial(W_1)-1} - \dots - y_i^{\partial(W_i)}\tilde{\phi}^{\partial(W_i)-1} - \dots} \tag{3.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться явным видом ряда Γ, формулами (3.4) и результатом леммы 3.2.

Используя, наконец то, что ряды ϕ и $\tilde{\phi}$ связаны соотношением (3.5), а также уравнение (3.6) получаем, что функция $\phi(x_1,\dots,x_r)$ есть решение уравнения (3.2). Предложение доказано.

Возвратимся к доказательству теоремы 3.I. Воспользуемся критерием Дэя [4] правой аменабельности полугруппы с правым законом сокращения: полугруппа S аменабельна справа тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора T_μ правого сдвига на S, где

$$(T_\mu f)(g) = \sum_{h\in S} p(g,h)f(h) \qquad f\in l_2(S)$$

равен I $(p(g,h)=\mu(g^{-1}h))$. Из результатов работы [19] следует, что спектральный радиус оператора T_μ не меньше спектрального радиуса случайного блуждания на S построенного по мере μ, т.е. величины

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_{e,e}^{(n)})^{\frac{1}{n}}$$

где $\mu_{e,e}^{(n)}$ – вероятность возвращения в единицу полугруппы S.
Если у ряда (3.I) существует кратный положительный корень в круге сходимости, то в силу предложения 3.I это означает, что точка $\mu_1,\dots,\mu_r$ является особой точкой функции $\phi_K(x_1,\dots,x_r)$. Следовательно 1 есть особая точка ряда

$$\phi_K^*(x) = \phi_K(\mu_1 x,\dots,\mu_r x) = 1 + \sum_{W\in\mathcal{E}(K)} \mu(W)x^{\partial(W)}$$

радиус сходимости которого в силу включения $\mathcal{E}(K)\subset H$, где $S_K \simeq F_A/H$ не меньше радиуса сходимости ряда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{e,e}^{(n)} x^n$$

Так как радиус сходимости ряда $u(x)$ не меньше I, то

$$\lim_{n\to\infty}\{\mu_{e,e}^{(n)}\}^{\frac{1}{n}}=1$$

и, следовательно, $r(T_\mu)=1$. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Пусть код K состоит из слов

$$W_1=a_0\underbrace{a_1\cdots a_1}_{l_1}$$

$$W_2=a_0\underbrace{a_2\cdots a_2}_{l_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$W_r=a_0\underbrace{a_r\cdots a_r}_{l_r}\qquad l_1,\ldots,l_r>0$$

Такой код называется каноническим и нетрудно проверить (см.[20],[23]), что какие бы ни были числа l_i существует распределение μ для которого ряд (3.I) имеет кратный положительный корень. Так как полугруппа

$$S_K=\langle a_0,a_1,\ldots,a_r\,|\,W_1=e,\ldots,W_r=e\rangle$$

является полугруппой с правым законом сокращения, то она аменабельна справа при любых l_i.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Ф.Спицер. Принципы случайного блуждания, "Мир", Москва, I969.

2. H. Kesten, Full Banach mean values on countable groups, Math. Scand., v. 7, N1, 1959, p. 146-156.

3. H. Kesten, Symmetric random walks on groups, Trans. Amer. Math. Soc., v. 92, N2, p. 336-354.

4. M. Day, Convolution, means, and spectra, Illinois J. Math., v. 8, N1, 1964, p. 100-111.

5. M. Greendlinger, On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems with applications, Comm. Pure and Appl. Math., v19, 1960, p. 641-677

6. М.Гриндлингер, К проблемам тождества слов и сопряженности, Известия АН СССР, сер.матем.,29, № 2 (I965), 245-268.

7. Ф.Гринлиф, Инвариантные средние на топологических группах, "Мир", Москва, I973.

8. H. Furstenberg, Noncommuting random products, Trans. Amer. Math. Soc., v. 108, N3, 1963, p. 377-428.

9. Е.Б.Дынкин, М.Б.Малютов, Случайное блуждание на группах с конечным число образующих, ДАН I37 (I96I),I042-I045.

I0. Б.Я.Левит, С.А.Молчанов, Инвариантные цепи на свободной группе с конечным число образующих. Вестн.МГУ, № 4,I97I, с.80-88.

II. A. Avez, Entropie des groupes de type fini, Comptes Rendus, T. 275 - séries A et B, N. 25 (18 Décember 1972).

I2. С.Карлин, Основы теории случайных процессов, "Мир", Москва, I97I.

I3. H. Furstenberg, Random Walks and Discrete Subgroups of Lie Groups, Advances in Probability, vol. 1, Marcel Dekker, INC, New York, 1971.

I4. S. Karlin and J. L. Mc Gregor, The differential equations of birth-and-death processes and the Stieltjes moment problem, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 85, 1957, p. 489-546.

I5. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.I "Мир", Москва, I964.

I6. С.И.Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, "Наука", Москва, I975.

I7. В.Магнус, А.Каррас, Д.Солитер, Комбинаторная теория групп, "Наука", Москва, I974.

I8. J. M. Rosenblatt, A generalization of Følner's conditions, Math. Scand., v. 33, N 1, 1973, p. 153-170.

I9. Vere-Jones, Ergodic properties of nonnegative matrices-II, Pacific J. Math., v. 26, N 3, 1968, p. 601-620.

20. А.Н.Лившиц, К проблеме изоморфизма схем Бернулли, Теория вероятностей и ее применения, т.XIX÷2, I974, 409-4I5.

2I. Р.И.Григорчук, Симметрические случайные блуждания на дискретных группах, сб-к "Многокомпонентные случайные системы", "Наука", Москва, I978.

22. Р.И.Григорчук, Симметрические случайные блуждания на дискретных группах, УМН, т.XXXII, № 6, I977.

23. Р.И.Григорчук, А.М.Степин, О кодировании сдвигов Маркова, Доклады 7.-ой Всесоюзной конференции по теории информации, Вильнюс, I978.