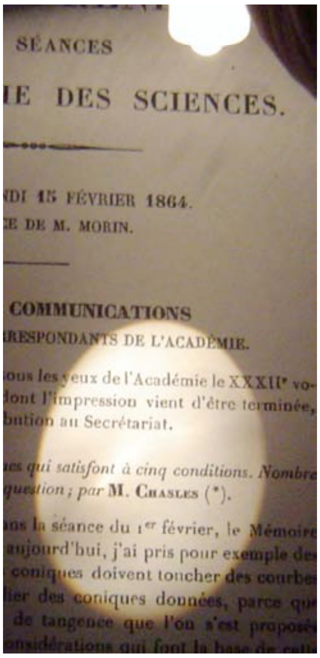
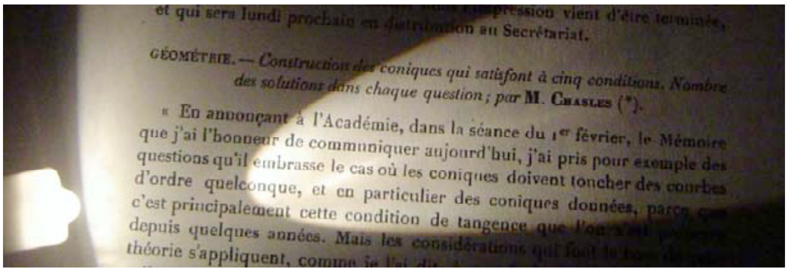
Trois mille deux cent soixante-quatre…

Comment Jean-Yves a récemment précisé un théorème de géométrie
que Michel a démontré il y a cent quarante-deux ans.

Des courbes vénérables

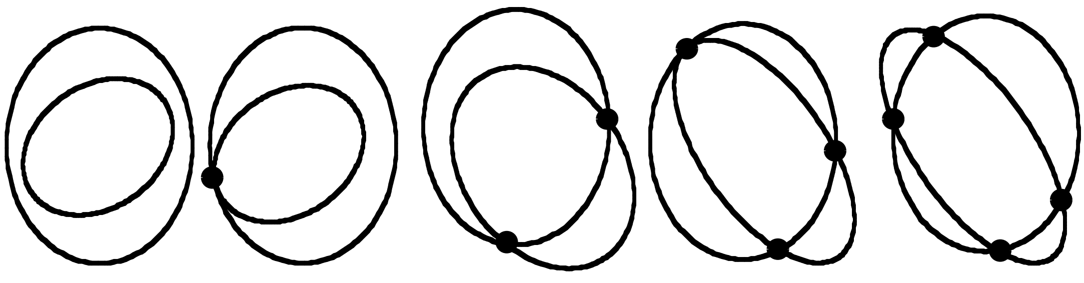


Une lampe-torche éclaire des zones limitées par des courbes qu'on appelle des *coniques*. L'étude de ces courbes remonte aux grecs anciens (*Appolonius*, $3^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère) et elle a conservé un rôle central en géométrie pendant des siècles. Jusqu'en 1970, une bonne partie du programme de mathématiques des classes terminales était consacrée à ces courbes.



Intersection de coniques

Deux coniques peuvent se couper en 0, 1, 2, 3 ou 4 points.



Les mathématiciens considèrent que deux coniques se coupent **toujours** en 4 points, quitte à admettre que certains d'entre eux sont « imaginaires », ou « à l'infini » ou même « multiples » ! Jeu de mots ? Peut-être ! Mais ceux qui connaissent les nombres complexes se souviennent : on apprend au collège qu'il n'y a pas de nombre dont le carré est –1, mais une fois arrivé en terminale, on apprend l'existence d'un mystérieux nombre *i* « purement imaginaire » dont le carré est –1…

Pauvre Chasles !

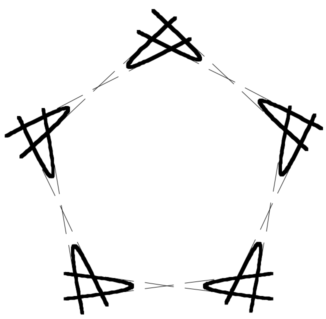
Michel Chasles
(1793-1880)

Les lycéens connaissent la « *relation de Chasles* » : si A,B,C sont trois points sur une droite alors $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. Cette relation est certes utile mais elle ne rend pas justice à ce pauvre Chasles qui mérite une meilleure reconnaissance. De plus, la mémoire de Chasles est entachée d'une circonstance malheureuse : le brave savant s'est laissé abuser pendant de nombreuses années par un faussaire qui lui vendait à prix d'or des « manuscrits anciens » incroyables, dont une lettre d'amour de Cléopâtre à César, en français !!! Mais Michel Chasles était avant tout l'un des plus grands géomètres du $19^{ème}$ siècle, « l'homme pour qui les coniques n'avaient pas de secrets », « l'empereur de la géométrie ». Nous allons lui rendre justice…

Un théorème difficile de Chasles (1864)

On sait depuis très longtemps que par 5 points du plan passe une unique conique. Au milieu du $19^{ème}$ siècle, les géomètres se lancent un défi. Étant données 5 coniques dans le plan, combien peut-on tracer de coniques qui leur sont tangentes ? La question n'est pas facile… les solutions fausses sont nombreuses… Steiner affirmait à tort que la réponse est 7776. De Jonquières ne touvait pas le même résultat, mais il n'osait pas le publier, tant la réputation de Steiner était grande ! Finalement, Chasles trouve la solution correcte en 1864 : **Il y a 3264 coniques tangentes à 5 coniques données.** Bien sûr, Chasles travaille avec les points imaginaires et il est possible que parmi ces 3264 coniques certaines (peut-être toutes) soient de mythiques coniques imaginaires et n'existent donc pas « réellement ». Tout ce qu'on peut dire à coup sûr, c'est qu'il y a *au plus* 3264 coniques qui sont tangentes à 5 coniques données.

Un exemple difficile de 1997



En 1997, trois mathématiciens, *Ronga, Tognoli et Vust*, ont réussi un tour de force. Ils ont trouvé un exemple de 5 coniques *réelles* bien choisies, telles que l'*intégralité des 3264 coniques* de Chasles existent bel et bien : elles sont « réelles ». C'est le cas pour les 5 hyperboles sur la figure suivante… Mais il ne s'agit que d'un exemple. Pour d'autres configurations des 5 coniques, combien parmi les 3264 sont réelles ?

Un joli théorème (lyonnais !) de 2005 : au moins 32 sur les 3264

Jean-Yves Welschinger
(1974 - ….)

Jean-Yves Welschinger, chercheur CNRS à Lyon, vient de montrer un très joli théorème. On considère 5 ellipses dans le plan dont les intérieurs ne se rencontrent pas, comme sur la figure. Alors, parmi les 3264 coniques de Chasles, au moins **32** existent réellement !

Quatre (bonnes ?) raisons qui font que ce théorème est intéressant

❶ La démonstration est vraiment jolie. Elle a sans aucun doute procuré un vif plaisir esthétique à Jean-Yves, ainsi qu'à ses lecteurs…

❷ Ce théorème complète et éclaire un théorème qui date de près de 150 ans.

❸ La preuve utilise des méthodes extrêmement récentes en mathématiques fondamentales, encore inaccessibles il y a dix ans, qui ont bénéficié de l' aide indispensable de physiciens théoriciens ! Il ne s'agit pas d'un théorème que Chasles aurait pu montrer, mais le résultat d'un travail collectif d'une communauté de mathématiciens qui ont accumulé de nouvelles idées depuis plusieurs siècles.

❹ De nouvelles questions se posent : peut-on généraliser ce résultat pour d'autres configurations des 5 coniques ? à d'autres types de courbes, à des surfaces ? On sait par exemple que le nombre de courbes de degré 4 tangentes à 14 courbes données de degré 4 est 23 011 191 144. Jean-Yves ou l'un de ses successeurs sauront-t-ils relever le défi et déterminer combien d'entre elles sont réelles ???

Tout reste à faire…